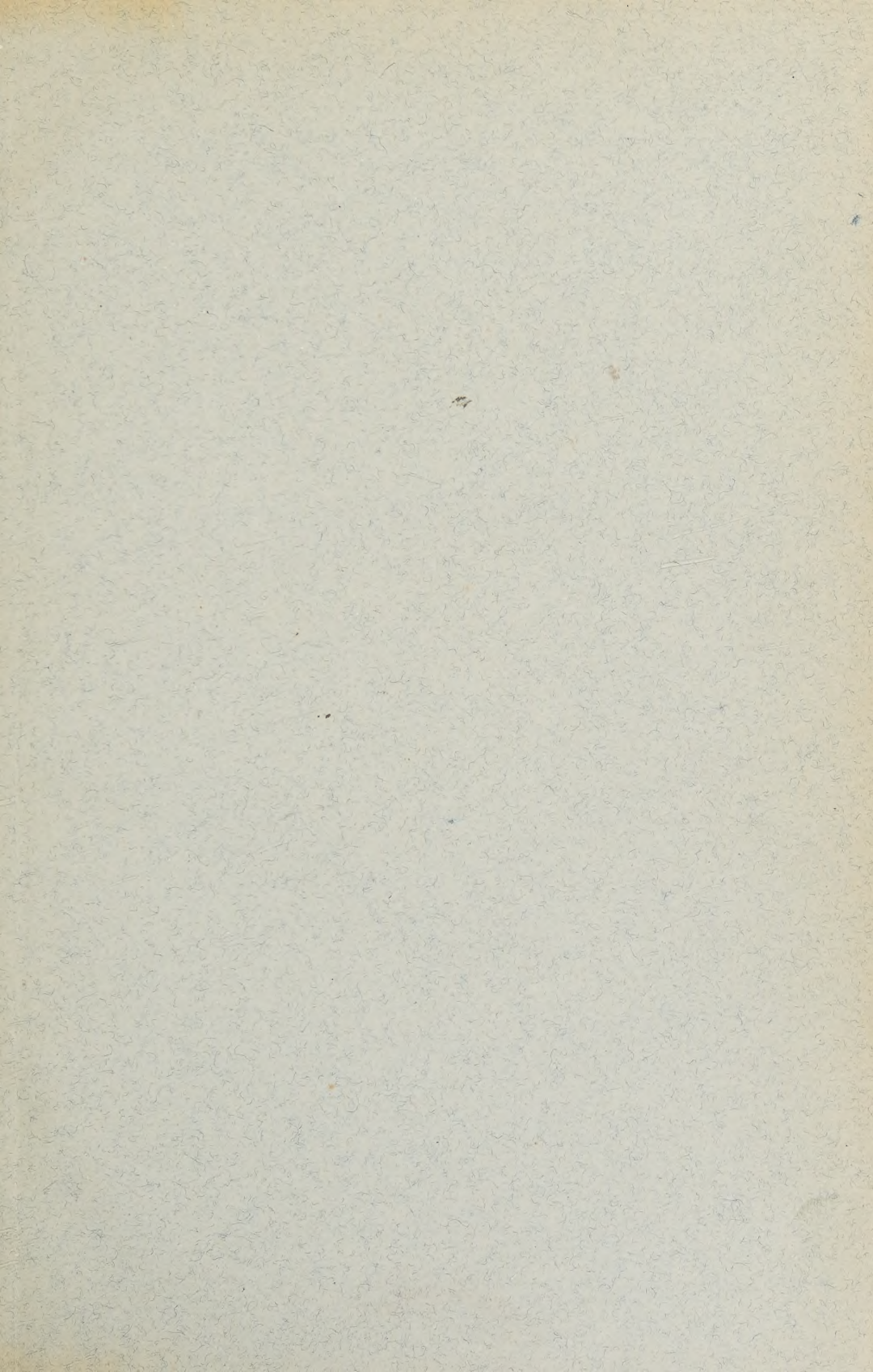


EDWIN M. BLAKE,


BROOKLYN, N. Y.

CLASS

No. 252.







Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
Kahle/Austin Foundation

VORLESUNGEN
ÜBER
MATHEMATISCHE PHYSIK,

GEHALTEN
AN DER
UNIVERSITÄT KÖNIGSBERG

VON
FRANZ NEUMANN,

DOCTOR DER PHILOSOPHIE UND DER MEDICIN, PROFESSOR DER PHYSIK UND MINERALOGIE,
GEHEIMER REGIERUNGSRATH, AUSWÄRTIGES MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSEN-
SCHAFTEN ZU BERLIN, MÜNCHEN, GÖTTINGEN, EHRENMITGLIED DER AKADEMIE DER
WISSENSCHAFTEN ZU WIEN, CORRESPONDIRENDES MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSEN-
SCHAFTEN ZU PETERSBURG, LONDON, PARIS, BOLOGNA, ROM, MITGLIED DES NATUR-
FORSCHENDEN VEREINS ZU HALLE, MITGLIED DER GELEHRTEN GESELLSCHAFT ZU
FRANKFURT A. M., EHRENMITGLIED DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT ZU KÖNIGSBERG
IN PR., RITTER DES ORDENS POUR LE MÉRITE, RITTER DES MAXIMILIAN-ORDENS,
RITTER DES PREUSSISCHEN KRONEN-ORDENS MIT STERN, RITTER DES ROTHEN ADLER-
ORDENS ZWEITER KLASSE MIT EICHENLAUB UND STERN, INHABER DER COPLEY-MEDAILLE.

HERAUSGEGEBEN VON SEINEN SCHÜLERN.

IN ZWANGLOSEN HEFTEN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1887.

VORLESUNGEN
ÜBER DIE
THEORIE DES POTENTIALS
UND DER
KUGELFUNCTIONEN.

GEHALTEN AN DER UNIVERSITÄT KÖNIGSBERG

VON

DR. FRANZ NEUMANN,

PROFESSOR DER PHYSIK UND MINERALOGIE.

HERAUSGEGEBEN VON

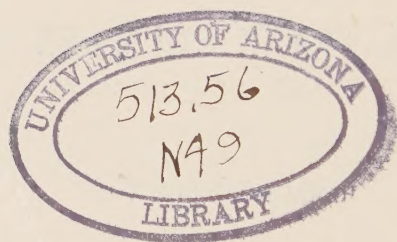
DR. CARL NEUMANN,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.

MIT FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1887.



Einleitung.

Das vorliegende Werk ist theils direct aus den *Vorlesungen* meines hochverehrten Vaters, theils aber auch auf Grund der von ihm publicirten *Abhandlungen* entstanden. In ersterer Beziehung ist, ausser einer von mir selbst im Jahre 1852/53 gehörten zweistündigen Vorlesung, namentlich eine viel ausführlichere vierstündige Vorlesung vom Winter 1856/57 zu nennen, über welche *O. E. Meyer* (in Breslau) sein sehr sorgfältiges und höchst schätzbares Vorlesungsheft mir zur Verfügung zu stellen die Güte hatte. Was andererseits die benutzten *Abhandlungen* betrifft, so sind im Ganzen *drei* zu nennen: von 1838, 1847 und 1878, deren Titel man weiterhin auf pg. 130 und pg. 310 näher angegeben findet.

Um über die Richtung und den Gang des vorliegenden Werkes von vornherein eine ungefähre Vorstellung zu geben, mag es mir gestattet sein, über den Inhalt der aufeinanderfolgenden Capitel hier Einiges mitzutheilen.

Das erste Capitel enthält die Definition und die allgemeinen Eigenschaften des Potentials, namentlich z. B. die Lehre von den *Gleichgewichtsoberflächen*, die Theorie der *Laplace-Poisson'schen partiellen Differentialgleichung*, und daneben auch die Transformation dieser Gleichung auf Cylindercoordinaten und auf Polarcoordinaten.

Im II. und III. Cap. stellen wir uns die Aufgabe, das Potential eines homogenen Körpers wirklich zu berechnen, und zu diesem Zweck die reciproke Entfernung zweier Punkte — und zwar unter Anwendung von Polarcoordinaten — in eine Reihe zu entwickeln. Bei Ausführung dieser schon von *Laplace* angegebenen Entwicklung gelangen wir zu den nur von *einem* Argument abhängenden Kugelfunctionen $P_n(\mu)$, und nehmen dabei Veranlassung, diese Functionen $P_n(\mu)$ einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen, dieselben in verschiedener Weise darzustellen: durch Reihen, durch bestimmte Integrale und durch Differentialquotienten.

Unter Anwendung der für die reciproke Entfernung zweier Punkte erhaltenen Entwicklung suchen wir sodann das Potential eines homogenen Körpers für den Fall zu berechnen, dass dieser Körper ein *Sphäroid* ist, und gelangen hierbei zu den allgemeinen, von *zwei* Argumenten abhängenden Kugelfunctionen $Y_n(\mu, \varphi)$, und zugleich auch zu dem wichtigen Satze, dass jede beliebige Function $f(\mu, \varphi)$, die für $\mu = -1 \dots +1$ und $\varphi = 0 \dots 2\pi$ endlich bleibt, innerhalb dieser Grenzen nach den $Y_n(\mu, \varphi)$ entwickelbar ist.

Im IV. Cap. werden wir sodann die Function $Y_n(\mu, \varphi)$ einer genaueren Untersuchung unterwerfen, und namentlich zeigen, dass dieselbe, mittelst der Function $P_n(\mu)$ und gewisser zu $P_n(\mu)$ adjungirter Functionen $P_{nj}(\mu)$, in einfacher Weise darstellbar, und im Ganzen mit $(2n+1)$ *willkürlichen Constanten* behaftet ist. Von besonderer Wichtigkeit sind dabei die im Verlaufe dieser Untersuchungen für die Functionen $Y_n(\mu, \varphi)$, $P_n(\mu)$ und $P_{nj}(\mu)$ sich ergebenden Integraleigenschaften.

Mit dem V. Cap. beginnen die Anwendungen der entwickelten Theorie auf bestimmte physikalische Fragen, zunächst auf die Frage nach der *Figur einer rotirenden incompressiblen Flüssigkeit*. Und die betreffenden Untersuchungen bilden alsdann weiterhin die Grundlage für Erörterungen über die *Figur der Erde*, über die Verschiedenheit der *Schwere* an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche, und über das Phänomen der *Ebbe und Fluth*.

Das VI. Cap. enthält die *Gauss'sche Theorie des Erdmagnetismus*. Dabei wird z. B. gezeigt, wie man die magnetische Einwirkung eines *Gebirges* zu bestimmen vermag, und ferner gezeigt, wie man auf Grund der Theorie dereinst die wichtige Frage zu beantworten im Stande sein wird, ob der Sitz der sogenannten erdmagnetischen Kraft wirklich *innerhalb* der Erde, oder, zum Theil wenigstens, *ausserhalb* derselben zu suchen sei.

VII. Cap. — Soll eine über die ganze Erdoberfläche sich ausbreitende Function $f(\mu, \varphi)$, wie z. B. die Intensität der verticalen Componente des Erdmagnetismus, oder wie z. B. die an der Erdoberfläche vorhandene Temperatur, ihrem analytischen Ausdruck nach näher bestimmt werden, so kann das auf empirischem Wege immer nur dadurch geschehen, dass man die Werthe der Function an einzelnen Stellen der Erdoberfläche durch Beobachtung bestimmt, und aus diesen Beobachtungen durch Interpolation den analytischen Ausdruck der Function abzuleiten sucht. Es handelt sich nun hier darum, jene unbekannte Function $f(\mu, \varphi)$, auf Grund passender Beobachtungen, nach den Kugelfunctionen $Y_n(\mu, \varphi)$ zu entwickeln bis etwa inclusive

zur Kugelfunction p^{ter} Ordnung, wo p eine beliebig gegebene Zahl vorstellt. Dabei würde also, weil $Y_n(u, \varphi)$ mit $(2n + 1)$ willkürlichen Constanten behaftet ist, die Function $f(u, \varphi)$ durch einen Ausdruck darzustellen sein, der im Ganzen

$$1 + 3 + 5 + 7 \cdots + (2p + 1) = (p + 1)^2$$

unbekannte Constanten involvirt. Und es würden also z. B., falls $p = 4$ ist, 25 Gleichungen mit 25 Unbekannten aufzulösen sein.

Diese höchst mühsame und beschwerliche Rechnung kann ausserordentlich reducirt werden. Bedient man sich nämlich der *F. Neumann'schen Methode*, so bietet sich ein einfaches *System von Factoren* dar, mit denen man nur nöthig hat, die Gleichungen zu multipliciren, und dann zu addiren, um ohne Weiteres die Unbekannten zu erhalten. Diese Ausdrucksweise ist allerdings noch nicht völlig correct. Will man die Sache genauer andeuten, so ist zu bemerken, dass jene unbekannten Constanten erhalten werden durch *zweimalige* Anwendung der genannten Operation (Multiplication mit geeigneten Factoren und Addition), dass nämlich die *einmalige* Anwendung dieser Operation nur zu gewissen *intermediären* Constanten, sodann aber die *nochmalige* Anwendung derselben zu jenen *eigentlich gesuchten* Constanten führt, und dass beim ersten wie beim zweiten Mal das System der anzuwendenden Factoren einfache und unmittelbar angebbare Werthe besitzt.

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Beobachtungsorte in denjenigen $2pq$ Punkten liegen, in denen $2p$ äquidistante Meridiane von q Parallelkreisen geschnitten werden. Sind diese Parallelkreise ganz *ad libitum* gewählt, so muss ihre Anzahl q mindestens $= (2p + 1)$ sein. Man kann aber mit beinahe nur *halb* soviel, nämlich mit $q = (p + 1)$ Parallelkreisen auskommen, falls man diese Parallelkreise in solcher Weise auswählt, dass die Sinus ihrer geographischen Breiten identisch sind mit den $(p + 1)$ Wurzeln der Gleichung $P_{p+1}(u) = 0$.

Im VIII. Cap. werden wir die *Poisson'sche Theorie der elektrischen Vertheilung* darlegen, z. B. zeigen, dass, nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, *freie* Elektricität niemals im *Innern* eines Conductors, sondern immer nur an seiner *Oberfläche* sich vorfinden kann. Solches constatirt, entsteht von selber die Aufgabe, das Potential einer auf einer gegebenen Fläche ausgebreiteten Materie, d. i. das sogenannte *Flächenpotential* näher zu untersuchen. Hierbei ergibt sich der bekannte Satz, dass bei einem Durchgange durch die Fläche das Potential selber *stetig*, sein Differentialquotient nach der Normale der Fläche aber *sprungweise* sich ändert.

Sodann werden wir die allgemeine Theorie der elektrischen Vertheilung in Anwendung bringen auf den Fall der *Kugel*, wobei sich mancherlei beachtenswerthe Resultate ergeben. Denken wir uns z. B. die gegebene Metallkugel isolirt, von Hause aus unelektrisch, und sodann der Einwirkung eines äusseren positiv elektrischen Massenpunktes M ausgesetzt, so wird der diesem Punkt zugewendete Theil der Kugeloberfläche negativ-, der abgewendete positivelektrisch werden. Auch übersieht man sofort, dass die diese beiden Theile trennende *neutrale Zone* eine *Kreislinie* sein wird. Die genauere Untersuchung führt nun zu dem merkwürdigen Satze, dass die einzelnen Punkte dieser Kreislinie vom Punkte M eine Entfernung R besitzen, welche der Gleichung $R^3 = AB^2$ unterworfen ist. Dabei bezeichnet A den Centralabstand des Punktes M , und B die Länge der von M aus an die Kugel gelegten Tangente*).

Uebrigens werden wir die allgemeine Theorie der elektrischen Vertheilung nicht nur auf die *Kugel*, sondern auch auf den Fall in Anwendung bringen, dass der gegebene Conductor ein *Sphäroid* ist.

Das IX. Cap. enthält allgemeine Betrachtungen über die elektrische Vertheilung, namentlich den Nachweis dafür, dass der elektrische Gleichgewichtszustand durch die im vorhergehenden Capitel aus der Theorie abgeleiteten Gleichungen *vollständig und eindeutig* bestimmt ist. Solches constatirt, ergeben sich alsdann ohne Mühe gewisse einfache Sätze, die man füglich als *Sätze der Superposition* bezeichnen kann. Auch ergibt sich, unter Rücksichtnahme auf jenen allgemeinen Satz der Eindeutigkeit, die nähere Beschaffenheit der elektrischen Vertheilung in einzelnen speciellen Fällen, so z. B. in dem Falle, dass die Oberfläche des Conductors eine sogenannte *Gleichgewichtsoberfläche* ist, ferner in dem Falle, dass der Conductor eine *schaalenförmige Gestalt* besitzt. — Schliesslich wird noch aufmerksam gemacht auf gewisse allgemeine Sätze über die Substitution neuer Massen an Stelle von ursprünglich gegebenen Massen.

Im X. Cap. werden — nach dem Vorgange von *Green* — sämtliche Aufgaben, welche die Vertheilung der Elektrizität auf einem gegebenen Conductor betreffen, reducirt auf die Ermittlung einer gewissen dem Conductor zugehörigen Function U . Diese Function wird kurzweg die *charakteristische Function* des Conductors genannt.

Eine analoge Reduction wird sodann auch für diejenigen Aufgaben gegeben, welche den *stationären Temperaturzustand* in einem homogenen

*) Beiläufig sei bemerkt, dass im Text (pg. 184) die in Rede stehenden Grössen nicht mit M, A, B, R , sondern mit M_1, A_1, B_1, R_1 bezeichnet sind.

Körper betreffen. Insbesondere wird diese Theorie auf den Fall angewendet werden, dass der Körper eine *Kugel*, eine *Kugelschaale*, oder eine von zwei Parallelebenen begrenzte *Platte* ist.

XI. Cap. — Denkt man sich einen metallischen Conductor in den Schliessungsdraht einer constanten Galvani'schen Batterie eingeschaltet, so entsteht innerhalb des Conductors ein *stationärer elektrischer Strömungszustand*. Die Theorie dieses Zustandes wird näher dargelegt, und namentlich auch gezeigt werden, dass die betreffenden mathematischen Aufgaben auf die Ermittlung einer gewissen *characteristischen Function* U reducirbar sind, welche aber verschieden ist von der im vorhergehenden Capitel genannten Function U . Insbesondere wird die in Rede stehende Theorie auf den Fall angewendet werden, dass der Conductor eine *Kugel* ist.

XII. Cap. — Es handelt sich hier um die *elektrische Vertheilung auf zwei Kugeln*. Dieses Problem wird zuvörderst — nach dem Vorgehen von *Poisson* — auf eine gewisse Functionalgleichung reducirt. Sodann aber wird die Auflösung dieser Gleichung durch eine Methode erreicht werden, die unmittelbar aus der Natur des physikalischen Problems geschöpft ist, und die in Folge dessen einfacher und anschaulicher sein dürfte, als die von *Poisson* selber benutzte.

XIII. und XIV. Cap. — Dass es uns in den fünf letzten Capiteln gelungen ist, die Probleme der elektrischen Vertheilung, des stationären Temperaturzustandes und des stationären elektrischen Strömungszustandes für die *Kugel* wirklich zu lösen, verdanken wir vor Allem dem Umstande, dass wir die reciproke Entfernung zweier durch ihre *Polarcoordinaten* gegebenen Punkte schon früher in eine Reihe entwickelt hatten, deren einzelne Glieder der Laplace'schen Differentialgleichung Genüge leisten. Wollen wir also die Lösung der genannten Probleme für ein *Ellipsoid* namentlich für ein *Rotationsellipsoid* unternehmen, und dabei ein einigermaßen analoges Verfahren einzuschlagen suchen, so werden wir in erster Linie von Neuem nach einer Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Punkte, aber für *den* Fall zu trachten haben, dass die beiden Punkte durch *elliptische Coordinaten* gegeben sind, und zwar nach einer Entwicklung, deren einzelne Glieder wiederum der Laplace'schen Differentialgleichung Genüge leisten.

Eine derartige Entwicklung ist von *F. Neumann* gegeben worden. Dieselbe ist im Ganzen von einfacher und übersichtlicher Gestalt, involvirt aber nicht nur die Function $P_n(\mu)$, sondern daneben noch eine gewisse zweite Function $Q_n(\mu)$, welche derselben Differentialgleichung wie $P_n(\mu)$ Genüge leistet. Diese Function $Q_n(\mu)$, die sogenannte Kugelfunction *zweiter Art*, wird einer näheren Untersuchung

unterworfen. Und gleichzeitig werden auch die adjungirten Functionen $Q_{nj}(\mu)$ in Betracht gezogen, welche zu $Q_n(\mu)$ in derselben Beziehung stehen, wie die $P_{nj}(\mu)$ zu $P_n(\mu)$.

XV. Cap. — Unter Anwendung der soeben erwähnten F. Neumann'schen Entwicklung sind nun die Probleme der elektrischen Vertheilung, des stationären Temperaturzustandes und des stationären elektrischen Strömungszustandes für das *Rotationsellipsoid* mit Leichtigkeit lösbar. Um solches darzuthun, ist es ausreichend, einige ganz specielle Beispiele zu behandeln. Eines derselben betrifft diejenige elektrische Vertheilung, welche auf dem Rotationsellipsoid inducirt wird durch einen auf seiner Axe gelegenen elektrischen Massenpunkt.

Uebrigens ist jene F. Neumann'sche Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Punkte auch für mancherlei andere Aufgaben von Nutzen. So z. B. wird gezeigt werden, wie man mittelst derselben die Einwirkung einer von zwei confocalen Rotationsellipsoiden begrenzten homogenen Schaafe auf beliebige Punkte zu bestimmen vermag.

Indem ich dieses Werk der Oeffentlichkeit übergebe, habe ich schliesslich noch den Herren Dr. *M. Richter*, Oberlehrer *O. Richter* und Stud. math. *Langheinken* für die mir von denselben bei der Correctur zu Theil gewordene sehr schätzbare Unterstützung meinen aufrichtigen Dank auszusprechen, und dabei zu bemerken, dass, in Folge dieser Unterstützung, störende Druckfehler im vorliegenden Werke wohl kaum vorhanden sein dürften.

Leipzig, October 1887.

C. Neumann.

Inhaltsverzeichniss.

Erstes Capitel.

Definition und Eigenschaften des Potentials.

	Seite
§ 1. Einführung des Potentials	1
§ 2. Die Flächen constanten Potentials oder <i>Gleichgewichtsoberflächen</i> . . .	7
§ 3. <i>Die Laplace'sche Differentialgleichung.</i>	8
§ 4. Das Potential eines beliebigen Körpers in Bezug auf einen sehr weit entfernten Punkt	9
§ 5. Das Potential einer homogenen Kugel	12
§ 6. Weiteres über die Laplace'sche Differentialgleichung. Vervollständigung derselben durch <i>Poisson</i>	15
§ 7. Anwendung der Laplace'schen Differentialgleichung zur Berechnung des Potentials einer homogenen Kugel	17
§ 8. Transformation des Laplace'schen Differentialausdruckes auf Cylinder- coordinaten	20
§ 9. Transformation desselben auf Polarcoordinaten	21

Zweites Capitel.

Ueber diejenigen speciellen Kugelfunctionen, welche nur von einem Argument abhängen.

§ 1. Einführung der <i>Kugelfunctionen</i> $P_n(\mu)$	27
§ 2. Sich anschliessende Bemerkungen	31
§ 3. Die Differentialgleichung der Function $P_n(\mu)$	33
§ 4. Weitere Betrachtungen über diese Differentialgleichung	35
§ 5. Darstellung der Function $P_n(\mu)$ durch bestimmte Integrale	38
§ 6. Darstellung derselben durch einen Differentialquotienten	41
§ 7. Ueber die Wurzeln der Gleichung $P_n(\mu) = 0$	42

Drittes Capitel.

Ueber die allgemeinen Kugelfunctionen mit zwei Argumenten.

	Seite
§ 1. Die reciproke Entfernung zweier Punkte	45
§ 2. Definition der <i>allgemeinen Kugelfunctionen</i> , d. i. der <i>Laplace'schen Ypsilons</i>	48
§ 3. Der Laplace'sche Satz über das homogene Sphäroid	50
§ 4. Die von Laplace für eine willkürliche Function $f(\mu, \varphi)$ gegebene Entwicklung	52
§ 5. Die Integraleigenschaften der Kugelfunctionen	56
§ 6. Das Potential eines homogenen Sphäroids	60
§ 7. Anwendung der Theorie der Kugelfunctionen zur Berechnung des Potentials eines homogenen Körpers	62

Viertes Capitel.

Die analytischen Ausdrücke der allgemeinen Kugelfunctionen und die Integraleigenschaften derselben.

§ 1. Entwicklung der Kugelfunction $P_n(\cos \gamma)$	66
§ 2. Nachträglicher Beweis einer gewissen Formel	71
§ 3. Die analytischen Ausdrücke der allgemeinen Kugelfunctionen	74
§ 4. <i>Die Integraleigenschaften der Kugelfunctionen</i>	77
§ 5. Beiläufige Bemerkungen	79
§ 6. Methoden zur Entwicklung einer gegebenen Function nach Kugelfunctionen. Erste Methode	82
§ 7. Zweite Methode	83
§ 8. Betrachtung des besondern Falles, dass die zu entwickelnde Function nur von <i>einem</i> Argument abhängt	85

Fünftes Capitel.

Ueber die Gleichgewichtsfigur einer rotirenden incompressiblen Flüssigkeit.

§ 1. Ueber die zum Gleichgewicht erforderliche <i>Oberflächenbedingung</i> . . .	86
§ 2. Weitere Betrachtungen. Voraussetzung einer sehr geringen Rotationsgeschwindigkeit	88
§ 3. Discussion der Oberflächenbedingung	90
§ 4. Ergänzung	94
§ 5. Bestimmung der Gleichgewichtsfigur. Ueber die Figur der Erde . . .	96
§ 6. Die scheinbare Schwere als Function der geographischen Breite . . .	100
§ 7. <i>Ueber die Theorie der Ebbe und Fluth</i> . Aufstellung der Oberflächenbedingung	106
§ 8. Weiteres über Ebbe und Fluth. Discussion der erhaltenen Oberflächenbedingung	113
§ 9. Vereinfachung der in § 6 angestellten Untersuchungen	117

Sechstes Capitel.

Ueber die Gauss'sche Theorie des Erdmagnetismus.

	Seite
§ 1. Die analytischen Ausdrücke für die drei Componenten der magnetischen Kraft, unter der Voraussetzung, dass der Sitz dieser Kraft wirklich <i>innerhalb</i> der Erde sich befindet.	120
§ 2. Fortsetzung. — Der gegenseitige Zusammenhang zwischen jenen drei Componenten	123
§ 3. Fortsetzung. — Ueber die Aenderung, welche jene drei Componenten erfahren bei einer Erhebung über die Erdoberfläche.	125
§ 4. Ueber die Entscheidung der Frage, ob der Sitz der erdmagnetischen Kraft <i>innerhalb</i> oder <i>ausserhalb</i> der Erde zu suchen ist	127

Siebentes Capitel.

Neumann's Methode zur Entwicklung einer Function nach Kugelfunctionen auf Grund gegebener Beobachtungen.

§ 1. Hülfsätze über trigonometrische Functionen	132
§ 2. Hülfsätze über die Kugelfunctionen	134
§ 3. Die zu behandelnde Aufgabe	141
§ 4. Berechnung der intermediären Constanten C^2 , S^2	143
§ 5. Die für die Constanten A , B resultirenden Gleichungen	145
§ 6. Berechnung der Constanten A , B	146
§ 7. Andere Methode zur Berechnung der Constanten A , B	148
§ 8. Recapitulation	149
§ 9. Beiläufige Betrachtung über solche Functionen, die nur von einem einzigen Argument abhängen	150

Achstes Capitel.

Die Theorie der elektrischen Vertheilung.

§ 1. Die Grundvorstellungen	155
§ 2. Allgemeine Sätze über das elektrische Gleichgewicht	157
§ 3. Betrachtung einer gleichmässig mit Masse belegten Kreisfläche	162
§ 4. Betrachtung einer gleichmässig mit Masse belegten Kugelfläche	164
§ 5. Betrachtung einer <i>beliebigen</i> Fläche, die gleichmässig oder ungleichmässig, jedoch in stetiger Weise mit Masse belegt ist.	168
§ 6. Das Potential dieser Fläche	171
§ 7. Anwendung auf die Theorie der elektrischen Vertheilung	173
§ 8. Ueber die elektrische Dichtigkeit an der Berührungsstelle zweier Conductoren	175
§ 9. Die elektrische Vertheilung auf einer isolirten Metallkugel unter der Einwirkung eines äussern elektrischen Massenpunktes	177
§ 10. Fortsetzung. Betrachtung eines speciellen Falles	181
§ 11. Betrachtung des Falles, dass die Metallkugel zur Erde abgeleitet ist	185
§ 12. Die elektrische Vertheilung auf einem Sphäroid.	186
§ 13. Allgemeine Betrachtung über das Gesetz, nach welchem zwei elektrische Massentheilchen auf einander einwirken	190

Neuntes Capitel.

Allgemeine Betrachtungen über die elektrische Vertheilung.

	Seite
§ 1. Aufstellung einiger Hülssätze	194
§ 2. Gewisse allgemeine Formeln (A.), (B.), (C.), etc.	197
§ 3. Sich anschliessende Sätze	204
§ 4. Angabe einer strengeren Methode für gewisse in den beiden letzten Paragraphen angestellte Betrachtungen	207
§ 5. Beweis dafür, dass der elektrische Gleichgewichtszustand durch die aus der Theorie abgeleiteten Formeln <i>eindeutig</i> bestimmt ist.	209
§ 6. Einige Anwendungen der soeben aufgestellten Theoreme	215
§ 7. Ueber die elektrische Vertheilung auf dem Ellipsoid.	217
§ 8. Ueber die elektrische Vertheilung auf einem Conductor, dessen Oberfläche die Form einer sogenannten <i>Gleichgewichtsoberfläche</i> besitzt	220
§ 9. Ueber die elektrische Vertheilung auf einem <i>schaalenförmigen</i> Conductor	226
§ 10. Zwei sehr allgemeine Sätze über die Substitution neuer Massen an Stelle ursprünglich gegebener Massen	231

Zehntes Capitel.

Die charakteristische Function für die Aufgaben der elektrischen Vertheilung und für die Aufgaben des stationären Temperaturzustandes.

§ 1. Ueber die elektrische Vertheilung auf der Oberfläche eines gegebenen Conductors	235
§ 2. Anwendung der dargelegten Theorie auf die Kugel	240
§ 3. Beiläufige Bemerkungen	240
§ 4. Ueber den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers	242
§ 5. Anwendung auf die Kugel.	247
§ 6. Ueber den stationären Temperaturzustand eines <i>schaalenförmigen</i> homogenen Körpers.	248
§ 7. Anwendung auf die Kugelschaale	252
§ 8. Ueber den stationären Temperaturzustand einer von zwei Parallelebenen begrenzten homogenen Platte.	256

Elftes Capitel.

Die charakteristische Function für die Aufgaben des stationären elektrischen Strömungszustandes.

§ 1. Definition der elektromotorischen Kraft	262
§ 2. Ueber den stationären Zustand der elektrischen Strömung	264
§ 3. Ueber die Ursachen der elektromotorischen Kraft	266
§ 4. Die zu behandelnde Aufgabe	267
§ 5. Reduction dieser Aufgabe auf die Berechnung einer gewissen charakteristischen Function	270
§ 6. Anwendung auf die Kugel.	273

Zwölftes Capitel.

Die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln.

	Seite
§ 1. Allgemeine Sätze über das Potential einer Kugelflächenbelegung auf äussere und innere Punkte	278
§ 2. Betrachtung des besonderen Falles, dass die Belegung der Kugelfläche symmetrisch ist in Bezug auf einen Durchmesser derselben	281
§ 3. Anwendung auf die Frage nach der elektrischen Vertheilung	283
§ 4. Das zu behandelnde Problem.	287
§ 5. Der eigentliche Kern des Problems besteht in der Berechnung zweier Functionen $f(\varrho)$ und $\varphi(\sigma)$. Aufstellung einer Functionalgleichung für $f(\varrho)$	289
§ 6. Berechnung der Function $f(\varrho)$	292
§ 7. Die schliessliche Lösung des Problems	297
§ 8. Betrachtung des speciellen Falles, dass die beiden gegebenen Kugeln einander berühren	298
§ 9. Die Vertheilung der Elektricität auf zwei einander berührenden Kugeln für den Fall, dass der Radius der einen Kugel unendlich klein wird.	301
§ 10. Ueber die elektrische Dichtigkeit zweier einander berührenden Kugeln an denjenigen Stellen, die der Berührungsstelle diametral gegenüber liegen	303
§ 11. Beiläufige Betrachtung	305
§ 12. Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln, die sehr weit von einander entfernt, und durch einen dünnen Draht mit einander verbunden sind.	307

Dreizehntes Capitel.

Die Kugelfunctionen zweiter Art.

§ 1. Einführung der Kugelfunctionen zweiter Art $Q_n(\mu)$	311
§ 2. Weiteres über die Functionen $Q_n(\mu)$	320
§ 3. Die derivirten Functionen $P_n^{(j)}$, $Q_n^{(j)}$ und die adjungirten Functionen P_{nj} , Q_{nj}	322

Vierzehntes Capitel.

Einführung der elliptischen Coordinaten.

§ 1. Die elliptischen Coordinaten ϱ , μ , φ	326
§ 2. Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Punkte, unter der Voraussetzung, dass der eine dieser beiden Punkte ein Brennpunkt ist	329
§ 3. Transformation des Laplace'schen Differentialausdrucks auf elliptische Coordinaten	331

	Seite
§ 4. Entwicklung der reciproken Entfernung zweier beliebig gegebener Punkte	335
§ 5. Nachträglicher Beweis einer gewissen Formel	342
§ 6. Beweis eines <i>Jacobi'schen</i> Satzes	345
§ 7. Rückblick auf die elliptischen Coordinaten.	349

Fünfzehntes Capitel.

Ueber die das Rotationsellipsoid betreffenden Aufgaben.

§ 1. Die elektrische Vertheilung auf dem Ellipsoid, unter der Voraussetzung, dass von Aussen her keinerlei Kräfte einwirken	351
§ 2. Die auf einem zur Erde abgeleiteten Ellipsoid durch einen äussern elektrischen Massenpunkt inducirte Belegung	355
§ 3. Ueber das Potential einer unendlich dünnen homogenen Schaafe, welche begrenzt ist von zwei confocalen Ellipsoidflächen	358
§ 4. Uebergang vom gestreckten zum abgeplatteten Rotationsellipsoid	361

Anhang.

Nachträgliche Bemerkungen und Erläuterungen	362
Zur Orientirung über die in diesem Werke angewendeten Bezeichnungen	364

Erstes Capitel.

Definition und Eigenschaften des Potentials.

Nach dem *Newton'schen* Gesetz wirken zwei *ponderable* Massen mit einer Kraft aufeinander ein, welche proportional ist dem Product der Massen, und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung. Gleiches gilt nach dem *Coulomb'schen* Gesetz von zwei *elektrischen* Massen. Und Gleiches gilt bekanntlich auch von den sogenannten *magnetischen* Massen. Während aber im *ersten* Falle die Wirkung stets in einer gegenseitigen *Anziehung* besteht, ist sie in den *beiden letztern* Fällen *bald repulsiv, bald attractiv*, je nachdem die beiden Massen gleichartig oder ungleichartig sind.

Die in Rede stehenden Wirkungen sind, wie *Lagrange* (1777) und *Laplace* (1782) gezeigt haben, in einfacher Weise ausdrückbar mittelst einer gewissen Function, welche man heut zu Tage, nach dem Vorgehänge von *Green* (1828), das *Potential* oder die *Potentialfunction* zu nennen pflegt*). Dieses Potential soll im gegenwärtigen Capitel definiert und näher untersucht werden.

§ 1.

Einführung des Potentials.

Sind μ und m irgend zwei Massentheilchen, so ist die von μ auf m ausgeübte Kraft stets eben so gross, wie diejenige, mit welcher m

*) *Lagrange*: Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps, qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances. Nouveaux Mém. de l'Acad. d. Sc. de Berlin, année 1777.

Laplace: Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes. 1782.

Green: An Essay on the application of math. analysis to the theories of Electricity and Magnetism. 1828.

Diese Literaturangaben sind vom Herausgeber hinzugefügt auf Grund des auch nach dieser Seite hin höchst schätzbaren *Heine'schen* Handbuchs der Kugelfunctionen. Zweite Auflage, Bd. 1, S. 1 und Bd. 2, S. 342.

auf μ einwirkt. Wir bezeichnen diese beiden gleich grossen Kräfte mit \mathfrak{R} , und rechnen dieselben stets in *repulsivem Sinne*:

$$(1.) \quad \mathfrak{R} < \quad \cdot \quad \xrightarrow{E} \quad \cdot \quad > \mathfrak{R} \\ \mu \qquad \qquad \qquad m$$

D. h. wir rechnen die auf m einwirkende Kraft in der Richtung der über m hinaus verlängerten Linie E , und ebenso die auf μ einwirkende Kraft in der Richtung der über μ hinaus verlängerten Linie E . Dabei soll unter E die gegenseitige *Entfernung* der beiden Massentheilchen verstanden sein.

Dabei aber sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der gemeinschaftliche Werth \mathfrak{R} der beiden Kräfte positiv oder negativ ist. Hat \mathfrak{R} einen *positiven* Werth, so haben jene beiden Kräfte wirklich die in (1.) angegebenen Richtungen; und es findet also *Abstossung* statt. Ist hingegen \mathfrak{R} *negativ*, so werden jene beiden Kräfte in Wirklichkeit nicht die in (1.) angegebenen Richtungen, sondern die entgegengesetzten Richtungen haben; so dass also in diesem Falle *Anziehung* stattfindet.

Solches festgesetzt, gilt z. B. für die gegenseitige Einwirkung zweier *elektrischer* Massentheilchen m und μ die Formel:

$$(2.) \quad \mathfrak{R} = \frac{m\mu}{E^2}, \quad (\text{Coulomb'sches Gesetz}).$$

Auf Grund dieser Formel werden die beiden Kräfte \mathfrak{R} *positiv* oder *negativ* sein, d. h. die in (1.) angegebenen oder die entgegengesetzten Richtungen haben, je nachdem m und μ *gleiche* oder *verschiedene* Vorzeichen besitzen. Und dies steht im Einklang mit der bekannten Thatsache, dass gleichartige Elektricitäten einander abstossen und ungleichartige einander anziehen. Ueberdies involvirt die Formel (2.) ein *Maass* der elektrischen Masse. Denn ihr zufolge wird unter der elektrischen Masse *Eins* diejenige zu verstehen sein, welche auf eine gleich grosse elektrische Masse in der Entfernung *Eins* die Kraft *Eins* ausübt.

Genau dieselbe Formel (2.) und dieselben Bemerkungen finden ihre Stelle, wenn m und μ *magnetische* Massen sind.

Sind hingegen m und μ *ponderable* Massen, so findet zwischen denselben unter allen Umständen *Anziehung* statt. In diesem Falle sind also die in (1.) angegebenen Kräfte stets *negativ*; so dass man zu setzen hat:

$$(3.) \quad \mathfrak{R} = -k \frac{m\mu}{E^2}, \quad (\text{Newton'sches Gesetz}),$$

wo k eine *positive Constante* vorstellt.

Bei unsern Untersuchungen werden wir nun häufig dahingestellt sein lassen, ob die betrachteten Massen elektrische, magnetische oder

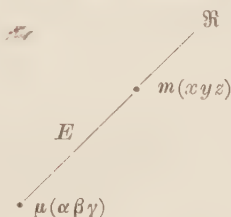
ponderable sind. Demgemäss wird es gut sein, die Formeln (2.), (3.) zusammenzufassen in die *eine* Formel:

$$(4.) \quad \mathfrak{R} = f \frac{m\mu}{E^2},$$

wo alsdann der *constant Factor* f den Werth 1 oder den Werth $(-k)$ besitzt, je nachdem die betrachteten Massen elektrische resp. magnetische, oder aber ponderable sind.

Sind x, y, z und α, β, γ die Coordinaten von m und μ , so ergeben sich für die Componenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ der von μ auf m ausgeübten Kraft \mathfrak{R} die Werthe:

$$(5.) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \mathfrak{R} \frac{x - \alpha}{E}, \\ \mathfrak{Y} &= \mathfrak{R} \frac{y - \beta}{E}, \\ \mathfrak{Z} &= \mathfrak{R} \frac{z - \gamma}{E}, \end{aligned}$$



Dabei ist die Grösse

$$(5a.) \quad E = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}$$

als *positiv* anzusehen, wie solches auch weiterhin durchweg geschehen soll. Beiläufig bemerkt, folgt aus (5a.) durch partielle Differentiation nach x :

$$(5b.) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{x - \alpha}{E} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{E} \right) = - \frac{x - \alpha}{E^3}.$$

Die Formeln (5.) können, falls man für \mathfrak{R} seinen Werth (4.) einsetzt, auch so geschrieben werden:

$$(6.) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= fm\mu \frac{x - \alpha}{E^3}, \\ \mathfrak{Y} &= fm\mu \frac{y - \beta}{E^3}, \\ \mathfrak{Z} &= fm\mu \frac{z - \gamma}{E^3}, \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (5b.) auch so:

$$(7.) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= -fm \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{E} \right), \\ \mathfrak{Y} &= -fm \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{E} \right), \\ \mathfrak{Z} &= -fm \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{E} \right). \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die Wirkung in Betracht ziehen, welche ein aus beliebig vielen Massentheilen μ, μ', μ'', \dots bestehendes *System* auf ein einzelnes Massentheilehen $m(x, y, z)$ ausübt. Sind $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots$

die x -Componenten derjenigen Wirkungen, welche μ, μ', μ'', \dots , *einzel* genommen, auf m ausüben, so wird offenbar

$$(8.) \quad X = \mathfrak{X} + \mathfrak{X}' + \mathfrak{X}'' + \dots$$

die x -Componente der von dem ganzen System μ, μ', μ'', \dots auf m ausgeübten *Gesamtwirkung* vorstellen. Substituirt man hier für \mathfrak{X} den in (7.) angegebenen Werth, und für $\mathfrak{X}' \mathfrak{X}'', \dots$ die analogen Werthe, so folgt:

$$(9.) \quad X = -fm \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{E} + \frac{\mu'}{E'} + \frac{\mu''}{E''} + \dots \right).$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die beiden andern Componenten der in Rede stehenden *Gesamtwirkung*; sodass man also zu folgendem Satz gelangt:

Sind X, Y, Z die Componenten derjenigen Gesamtwirkung, welche auf ein einzelnes Massentheilchen $m(x, y, z)$ ausgeübt wird von einem beliebig gegebenen Massensystem μ, μ', μ'', \dots , so gelten die Formeln:

$$(10.) \quad \begin{aligned} X &= -fm \frac{\partial V}{\partial x}, \\ Y &= -fm \frac{\partial V}{\partial y}, \\ Z &= -fm \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo V die Bedeutung hat:

$$(11.) \quad V = \frac{\mu}{E} + \frac{\mu'}{E'} + \frac{\mu''}{E''} + \dots = \sum \frac{\mu}{E}.$$

Dabei repräsentiren E, E', E'', \dots die Abstände des Theilchens $m(x, y, z)$ von den einzelnen Theilchen μ, μ', μ'', \dots .

Dieses V pflegt man zu bezeichnen als das *Potential* des gegebenen Massensystems μ, μ', μ'', \dots auf den Punkt $m(x, y, z)$. Auf Grund der Formel (11.) kann man also sagen:

Unter dem Potential eines gegebenen Massensystems auf einen einzelnen Massenpunkt $m(x, y, z)$ ist die Summe aller in jenem System enthaltenen Massen zu verstehen, jede dividirt durch ihren Abstand von dem genannten Punkte.

X, Y, Z sind die *Componenten* der in Rede stehenden Gesamtwirkung. Bezeichnet man diese Gesamtwirkung selber mit R , so ist

$$\begin{aligned} X &= R \cos (R, x), \\ Y &= R \cos (R, y), \\ Z &= R \cos (R, z), \end{aligned}$$

wo $(R, x), (R, y), (R, z)$, die Winkel vorstellen, unter denen die Kraft R gegen die Coordinatenaxen geneigt ist. Demgemäss kann man die Formeln (10.) auch so schreiben:

$$\begin{aligned}
 (12.) \quad R \cos (R, x) &= -fm \frac{\partial V}{\partial x}, \\
 R \cos (R, y) &= -fm \frac{\partial V}{\partial y}, \\
 R \cos (R, z) &= -fm \frac{\partial V}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

Lässt man vom Punkte (x, y, z) eine beliebige Richtung p ausgehen, und multiplicirt man die Formeln (12.) mit $\cos (p, x)$, $\cos (p, y)$, $\cos (p, z)$, und addirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 (13.) \quad R \cos (R, p) &= -fm \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos (p, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos (p, y) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial V}{\partial z} \cos (p, z) \right).
 \end{aligned}$$

Diese letzte Formel ist einer weitem Vereinfachung fähig. Versteht man nämlich unter dx , dy , dz die Zuwächse, welche die Coordinaten des Punktes (x, y, z) annehmen würden, wenn man denselben längs der Richtung p um die Strecke dp verschieben wollte, so sind offenbar dx , dy , dz die rechtwinkligen Projectionen von dp auf die Coordinatenachsen. Folglich ist $dx = dp \cos (p, x)$, ebenso $dy = dp \cos (p, y)$, und $dz = dp \cos (p, z)$, oder etwas anders geschrieben*):

$$\begin{aligned}
 (14.) \quad \frac{dx}{dp} &= \cos (p, x), \\
 \frac{dy}{dp} &= \cos (p, y), \\
 \frac{dz}{dp} &= \cos (p, z).
 \end{aligned}$$

Somit folgt aus (13.):

$$R \cos (R, p) = -fm \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dp} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dp} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dp} \right),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(15.) \quad R \cos (R, p) = -fm \frac{dV}{dp}.$$

Diese Formel (15.) ist *analog* den früheren Formeln (12.). Sie liefert die Componente von R nach der Richtung p , ebenso wie jene die Componenten nach den Richtungen der drei Coordinatenachsen liefern.

Unsere ursprüngliche Aufgabe, die Wirkung eines gegebenen Systems μ, μ', μ'', \dots auf einen einzelnen Massenpunkt $m(x, y, z)$ zu berechnen,

*) Man kann auf Grund der Formeln (14.) folgenden Satz aussprechen:

Differenzirt man die Coordinaten eines Punktes (x, y, z) nach irgend einer von diesem Punkte ausgehenden Richtung p , so werden die so entstehenden Differentialquotienten nichts Anderes sein, als die Richtungscosinus von p .

ist gegenwärtig reducirt auf die Aufgabe, das betreffende Potential zu berechnen. Denn sobald dieses Potential V gefunden ist, ergeben sich aus demselben ohne Weiteres die Componenten jener Wirkung, mittelst der Formeln (10.), respective (12.) und (15.).

Das gegebene materielle System kann übrigens auch ein *continuirlich* den Raum erfüllender Körper sein. Alsdann werden unter μ, μ', μ'', \dots die unendlich kleinen Massenelemente dieses Körpers zu verstehen sein. Und demgemäss wird man den Werth des Potentials (11.):

$$(16.) \quad V = \sum \frac{\mu}{E}$$

in diesem Falle auch so schreiben können:

$$(17.) \quad V = \int \frac{q dv}{E}.$$

Hier bezeichnet dv ein Volumelement des Körpers, q die Dichtigkeit, mithin $q dv$ die in dv enthaltene Masse, und E den Abstand dieses Massenelementes $q dv$ von dem gegebenen Punkte $m(x, y, z)$; und überdies ist die Integration ausgedehnt zu denken über alle Elemente des ganzen Körpers.

An die Formel (15.) schliesst sich eine gewisse Bemerkung von Gauss an. Um näher hierauf einzugehen, wollen wir uns den Punkt $m(x, y, z)$ in Bewegung begriffen denken längs irgend einer Curve, deren Anfangspunkt A , und deren Endpunkt B heissen mag. In irgend einem Augenblicke dieser Bewegung sei s die von A aus gerechnete Bogenlänge des Punktes m , und S die tangentielle Componente der auf m von Seiten des gegebenen materiellen Systems ausgeübten Wirkung R . Alsdann ist nach (15.):

$$(\alpha.) \quad S = -fm \frac{dV}{ds},$$

d. i.

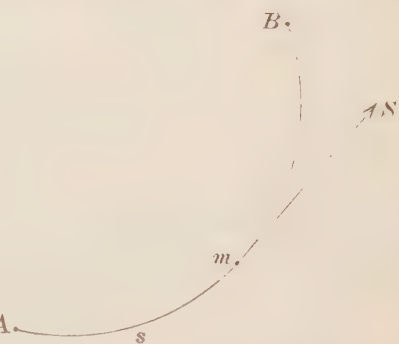
$$(\beta.) \quad S ds = -fm dV.$$

Hieraus folgt durch Integration über alle Elemente ds der gegebenen Curve:

$$(\gamma.) \quad \int_A^B S ds = -fm (V_B - V_A),$$

wo V_A und V_B die Werthe des Potentials A und B in den Punkten A und B vorstellen.

Die rechte Seite der Formel $(\gamma.)$ verschwindet aber, falls B mit A zusammenfällt, d. h. falls die gegebene Curve eine geschlossene ist. Und diese Bemerkung lässt sich z. B. benutzen, um Beobachtungen über den *Erdmagnetismus* zu controliren. Denkt man sich nämlich an



der Erdoberfläche irgend eine geschlossene Curve construirt, so muss das über diese Curve ausgedehnte Integral $\int S ds$ verschwinden. D. h. es muss die Summe aller Elemente ds dieser Curve, jedes multiplicirt mit der zugehörigen tangentialen Componente S der erdmagnetischen Kraft, den Werth *Null* haben.

§ 2.

Die Flächen constanten Potentials.

Das Potential V eines gegebenen Massensystems auf einen variablen Punkt $m(x, y, z)$ ist eine Function der Coordinaten dieses Punktes:

$$(1.) \quad V = V(x, y, z).$$

Setzt man nun

$$(2.) \quad V(x, y, z) = C,$$

wo C irgend eine *Constante* vorstellen soll, so wird diese Formel (2.) die Gleichung einer gewissen *Fläche* sein; und zwar wird man diese Fläche als den geometrischen Ort derjenigen Punkte bezeichnen können, für welche das Potential den constanten Werth C hat. Errichtet man auf dieser durch die Gleichung (2.) dargestellten Fläche in irgend einem Punkte (x, y, z) die Normale n , so ist bekanntlich:

$$(3.) \quad \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Denkt man sich nun ferner an der betrachteten Stelle (x, y, z) , d. i. im Fusspunkte der Normale n einen *materiellen Punkt von der Masse m* , und bezeichnet man die von dem gegebenen Massensystem auf diesen Punkt m ausgeübte Gesamtwirkung mit R , so ist nach (12.) pg. 5:

$$(4.) \quad \cos(R, x) : \cos(R, y) : \cos(R, z) = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Aus (3.) und (4.) folgt:

$$(5.) \quad \cos(R, x) : \cos(R, y) : \cos(R, z) = \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z).$$

Und hieraus erkennt man sofort, dass die Richtung der auf m einwirkenden Kraft R *zusammenfällt* mit der Richtung der Normale n , — oder genauer ausgedrückt, dass diese beiden Richtungen entweder *zusammenfallen*, oder aber *zu einander entgegengesetzt* sind.

Also der Satz: *Versteht man unter V das Potential eines gegebenen Massensystems, ferner unter C eine willkürlich gewählte Constante, so wird durch die Gleichung $V = C$ eine gewisse Fläche dargestellt sein. Denkt man sich nun auf dieser Fläche irgend einen materiellen Punkt m gelegen, so wird die von dem gegebenen Massensystem auf den Punkt m ausgeübte Kraft zu der genannten Fläche senkrecht sein, und zu derselben senk-*

recht bleiben, welche Lage man dem Punkte auf der Fläche auch zuertheilen mag.

Solcher Flächen giebt es unendlich viele. Denn man kann der Constante C successiv verschiedene Werthe zuertheilen. Diese Flächen können kurzweg bezeichnet werden als die *Flächen constanten Potentials*. Sie werden übrigens auch *Gleichgewichtsoberflächen*, oder, falls das gegebene Massensystem eine Flüssigkeit ist, auch *Niveaulächen* genannt.

§ 3.

Die Laplace'sche Differentialgleichung.

Das von einem gegebenen Massensystem μ, μ', μ'', \dots auf den Punkt $m(x, y, z)$ ausgeübte Potential

$$(1.) \quad V = \frac{\mu}{E} + \frac{\mu'}{E'} + \frac{\mu''}{E''} + \dots = \sum \frac{\mu}{E}$$

wird sich offenbar, falls man dem Punkte $m(x, y, z)$ irgend welche Bewegung zuertheilt, während dieser Bewegung Schritt für Schritt in *stetiger* Weise ändern, so lange der Punkt $m(x, y, z)$ von den einwirkenden Massentheilchen $\mu, \mu', \mu'' \dots$ durch irgend welche Zwischenräume getrennt bleibt. Gelangt hingegen jener Punkt mit irgend einem dieser Massentheilchen z. B. mit μ zur Coincidenz, so wird in diesem Augenblicke der Werth von V *unstetig* werden, nämlich *ins Unendliche aufspringen*.

Gleiches gilt, wie sich leicht zeigen lässt, auch für die ersten und die höheren *Ableitungen* von V nach x, y, z . Beachtet man nämlich die schon früher [in (5a, b.) pg. 3] notirten Formeln:

$$(2.) \quad \begin{aligned} E^2 &= (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{x - \alpha}{E}, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{y - \beta}{E}, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{z - \gamma}{E}, \end{aligned}$$

wo (α, β, γ) die Coordinaten von μ sind, so ergibt sich aus (1.) sofort:

$$(3.) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = - \sum \mu \frac{x - \alpha}{E^3}.$$

Und hieraus folgt weiter:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - \sum \mu \left(\frac{1}{E^3} - \frac{3(x - \alpha)}{E^5} \frac{\partial E}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = + \sum \mu \frac{3(x - \alpha)}{E^5} \frac{\partial E}{\partial y},$$

also mit abermaliger Rücksicht auf (2.):

$$(4.) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - \sum \mu \left(\frac{1}{E^3} - \frac{3(x - \alpha)^2}{E^5} \right), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = + \sum \mu \frac{3(x - \alpha)(y - \beta)}{E^5}.$$

In ähnlicher Weise kann man die *dritten* Ableitungen bilden. U. s. f. Doch sind die hingestellten Formeln (3.), (4.) bereits ausreichend, um zu zeigen, dass *sämmtliche* Ableitungen beliebiger Ordnung *stetig* sind,

so lange E, E', E'', \dots von Null verschieden bleiben, d. i. so lange der in Bewegung begriffene Punkt $m(x, y, z)$ von den einwirkenden Massentheilen μ, μ', μ'', \dots durch irgend welche Zwischenräume getrennt bleibt.

Dabei ist noch Folgendes zu bemerken. Die Werthe von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ sind, wie sich aus (4.) ergibt, folgende:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - \sum \mu \left(\frac{1}{E^3} - \frac{3(x - \alpha)^2}{E^5} \right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = - \sum \mu \left(\frac{1}{E^3} - \frac{3(y - \beta)^2}{E^5} \right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = - \sum \mu \left(\frac{1}{E^3} - \frac{3(z - \gamma)^2}{E^5} \right).$$

Hieraus aber folgt durch Addition und mit Rücksicht auf (2.):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = - \sum \mu \left(\frac{3}{E^3} - \frac{3E^2}{E^5} \right), \text{ d. i. } = 0.$$

Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Bezeichnet V das Potential eines gegebenen Massensystems auf einen variablen Punkt (x, y, z) , so werden

$$(5.) \quad V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad \text{etc.}$$

Functionen von (x, y, z) sein, welche endlich und stetig sind, so lange der Punkt (x, y, z) von den einwirkenden Massen durch irgend welche (wenn auch noch so kleine) Zwischenräume getrennt bleibt. Und gleichzeitig wird, so lange diese Bedingung erfüllt bleibt, die Gleichung stattfinden:

$$(6.) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Diese Gleichung heisst die Laplace'sche Differentialgleichung. Gleichzeitig mag das auf der linken Seite stehende Trinom

$$(7.) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{mit } \Delta V$$

bezeichnet, und der Laplace'sche Differentialausdruck genannt werden.

§ 4.

Das Potential eines beliebig gegebenen Körpers in Bezug auf einen sehr weit entfernten Punkt.

Es sei ein homogener oder nichthomogener Körper von beliebiger Gestalt gegeben, und es sei μ irgend ein Massenelement dieses Körpers. Das Potential des Körpers auf einen beliebigen Punkt (x, y, z) hat alsdann den Werth [vgl. (11.) pg. 4]:

$$(1.) \quad V = \sum \frac{\mu}{E},$$

wo E den Abstand des Punktes (x, y, z) vom Elemente μ vorstellt, und die Summation ausgedehnt zu denken ist über sämtliche Massenelemente μ des ganzen Körpers.

Bezeichnet man die Coordinaten von μ mit (α, β, γ) , so erhält man:

$$E^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2,$$

d. i.

$$E^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

oder kürzer geschrieben:

$$E^2 = r^2 - 2r\varrho \cos \gamma + \varrho^2,$$

und folglich:

$$(2.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{\varrho}{r} \cos \gamma + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}.$$

Hier haben alsdann r, ϱ, γ die Bedeutungen:

$$(3.) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad \cos \gamma = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\varrho r};$$

so dass also r und ϱ die Abstände der Punkte (x, y, z) und $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ vom Anfangspunkte O des Coordinatensystems vorstellen; während γ den von r und ϱ gebildeten Winkel bezeichnet.

Substituirt man in (1.) für $\frac{1}{E}$ den Werth (2.), so folgt:

$$(4.) \quad V = \frac{1}{r} \sum \frac{\mu}{\sqrt{1 - 2 \frac{\varrho}{r} \cos \gamma + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(4a.) \quad rV = \sum \frac{\mu}{\sqrt{1 - 2 \frac{\varrho}{r} \cos \gamma + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}.$$

Bringt man diese Formeln (4.), (4a.) auf den Fall in Anwendung, dass der sollicitirte Punkt (x, y, z) *unendlich fern*, mithin r *unendlich gross* ist, so wird $\frac{\varrho}{r}$ gleich Null, mithin die in den Formeln enthaltene Wurzelgrösse gleich *Eins* werden; so dass man erhält:

$$(5.) \quad (V)_{r=\infty} = 0,$$

$$(5a.) \quad (rV)_{r=\infty} = \sum \mu = M,$$

wo $M = \sum \mu$ die *Gesamtmasse* des gegebenen Körpers vorstellt. Man gelangt somit zu folgendem Satz:

Bezeichnet V das Potential eines gegebenen Körpers auf einen variablen Punkt, und r den Abstand dieses Punktes von irgend einem in der Endlichkeit gelegenen festen Punkte O , so wird V den Werth Null und rV den Werth M annehmen, sobald jener variable Punkt nach irgend welcher Seite hin sich ins Unendliche entfernt.

Dabei ist unter M die *Gesamtmasse* des gegebenen Körpers verstanden, und zugleich vorausgesetzt, dass alle *Massenelemente* des Körpers im *Endlichen* liegen.

Wir wollen jetzt den festen Punkt O , d. i. den Anfangspunkt des Coordinatensystems *im Innern* des gegebenen Körpers uns gelegen denken. Gleichzeitig mag der sollicitirte Punkt (x, y, z) so weit entfernt gedacht werden, dass sein Abstand r vom Punkte O *sehr gross* ist im Vergleich mit den Dimensionen des gegebenen Körpers. Für jedwedes Massenelement μ wird alsdann der Quotient $\frac{\varrho}{r}$ *sehr klein* sein, mithin der Ausdruck (2.) entwickelbar sein nach Potenzen von $\frac{\varrho}{r}$:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{2\varrho}{r} \cos \gamma - \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 \right] + \frac{1}{2 \cdot 4} \left[\frac{2\varrho}{r} \cos \gamma - \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 \right]^2 + \dots \right\}.$$

Vernachlässigt man also die *zweite und die höheren Potenzen* von $\frac{\varrho}{r}$, so folgt:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\varrho}{r} \cos \gamma \right\},$$

oder, falls man für $\cos \gamma$ den Werth (3.) einsetzt:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{r} + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^3}.$$

Substituirt man aber diesen Werth von $\frac{1}{E}$ in (1.), so folgt:

$$(6.) \quad V = \frac{M}{r} + \frac{x \Sigma(\mu \alpha) + y \Sigma(\mu \beta) + z \Sigma(\mu \gamma)}{r^3},$$

wo, ebenso wie vorhin, $M = \Sigma \mu$ die *Gesamtmasse* des Körpers vorstellt.

Noch einfacher gestaltet sich diese Formel, sobald man den Anfangspunkt O des Coordinatensystems in den *Schwerpunkte* des gegebenen Körpers hineinfallen lässt. Denn alsdann wird bekanntlich

$$\Sigma(\mu \alpha) = 0, \quad \Sigma(\mu \beta) = 0, \quad \Sigma(\mu \gamma) = 0;$$

sodass man erhält:

$$(7.) \quad V = \frac{M}{r}.$$

Also der Satz: *Das Potential eines Körpers von der Gesamtmasse M auf einen sehr weit entfernten Punkt ist nahezu $= \frac{M}{r}$, wo r den Abstand des Punktes vom Schwerpunkte des Körpers vorstellt. Oder mit andern Worten: Das in Rede stehende Potential ist nahezu von solcher Beschaffenheit, als wäre die ganze Masse des gegebenen Körpers in seinem Schwerpunkte concentrirt.*

§ 5.

Das Potential einer homogenen Kugel.

Das Potential einer *homogenen Kugel* auf einen Punkt $m(x, y, z)$ besitzt den Werth [vgl. (17.) pg. 6]:

$$(1.) \quad V = q \int \frac{dv}{E}.$$

Dabei repräsentirt q die *constante Dichtigkeit*, ferner dv ein Volumenelement der Kugel, und E den Abstand dieses Volumelementes vom Punkte $m(x, y, z)$; endlich ist die Integration ausgedehnt zu denken über sämtliche Volumelemente dv der ganzen Kugel.

Nimmt man das Centrum O der Kugel zum Anfangspunkte eines Polarcoordinatensystems, ferner die Linie Om zur Axe dieses Systems und bezeichnet man die Linie Om , ihrer Länge nach, mit r , ferner die Polarcoordinaten des Volumelementes dv mit $\varrho, \vartheta, \varphi$, der Art, dass ϱ den Centralabstand, ϑ das Complement der geographischen Breite, und φ die geographische Länge repräsentirt; -- so ist bekanntlich:

$$dv = \varrho^2 d\varrho \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

$$E^2 = \varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos \vartheta;$$

sodass die Formel (1.) übergeht in:

$$(2.) \quad V = q \int_0^A \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 d\varrho \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\sqrt{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos \vartheta}},$$

wo A den *Radius* der Kugel vorstellt. Hieraus folgt durch Ausführung der Integration nach φ :

$$(3.) \quad V = 2\pi q \int_0^A \int_0^\pi \frac{\varrho^2 d\varrho \sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos \vartheta}},$$

sodann durch Ausführung der Integration nach ϑ :

$$(4.) \quad V = \frac{2\pi q}{r} \int_0^A \left[\sqrt{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos \vartheta} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \cdot \varrho d\varrho.$$

Nun ist die Entfernung $E = \sqrt{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos \vartheta}$ unter allen Umständen *positiv* zu rechnen [vgl. (5a.) pg. 3]. Gleiches gilt mithin auch von denjenigen Specialwerthen, die diese Entfernung für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ annimmt. Demgemäss folgt aus (4.):

$$(5.) \quad V = \frac{2\pi q}{r} \int_0^A \left\{ \sqrt{(r + \varrho)^2} - \sqrt{(r - \varrho)^2} \right\} \varrho d\varrho,$$

mit dem Zusatz, dass die hier auftretenden Wurzelgrössen beide *positiv* zu rechnen sind.

Wir haben bisher die Frage, ob der sollicitirte Punkt m ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegen soll, ganz *in suspensio* gelassen.

Liegt m *ausserhalb* der Kugel, so ist $r > A$, mithin auch $r > \varrho$; sodass also in diesem Falle der in (5.) in der geschweiften Klammer enthaltene Ausdruck übergeht in:

$$(r + \varrho) - (r - \varrho) = 2\varrho;$$

wodurch man erhält:

$$V = \frac{2\pi q}{r} \int_0^A 2\varrho^2 d\varrho,$$

d. i.

$$(6a.) \quad V = \frac{4\pi q}{3} \frac{A^3}{r}.$$

Liegt hingegen m *innerhalb* der Kugel, so hat man zuvörderst eine durch m gehende, zur gegebenen Kugel concentrische *Hülfskugelfläche* zu construiren. Für jedwedes Massenelement $dv(\varrho, \vartheta, \varphi)$ wird alsdann $r > \varrho$ oder $r < \varrho$ sein, je nachdem dieses Element dv *innerhalb* oder *ausserhalb* der Hülfskugelfläche liegt. Demgemäss wird der in (5.) in der geschweiften Klammer enthaltene Ausdruck für die Elemente *innerhalb* der Hülfskugelfläche

$$= (r + \varrho) - (r - \varrho) = 2\varrho,$$

hingegen für die Elemente *ausserhalb* der Hülfskugelfläche

$$= (r + \varrho) - (\varrho - r) = 2r$$

sein. Demgemäss ergibt sich aus (5.)

$$V = \frac{2\pi q}{r} \left(\int_0^r 2\varrho^2 d\varrho + \int_r^A 2r\varrho d\varrho \right),$$

oder, falls man die Integrationen wirklich ausführt:

$$V = \frac{2\pi q}{r} \left(\frac{2r^3}{3} + r(A^2 - r^2) \right),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(6i.) \quad V = 2\pi q A^2 - \frac{2\pi q}{3} r^2.$$

Auf Grund der Formeln (6a.) und (6i.) gelangen wir zu folgenden Sätzen:

Bezeichnet A den Radius, q die Dichtigkeit und M die Gesamtmasse einer homogenen Kugel, so wird das Potential dieser Kugel auf irgend einen äussern Punkt a den Werth haben

$$(7a.) \quad V_a = \frac{4\pi q}{3} \frac{A^3}{r} = \frac{M}{r},$$

wo r den Centralabstand des Punktes vorstellt. Es wird mithin dieses Potential genau von derselben Beschaffenheit sein, als wäre die ganze Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkte concentrirt.

Andererseits wird das Potential der Kugel auf irgend einen innern Punkt i den Werth besitzen:

$$(7i.) \quad V_i = 2\pi q A^2 - \frac{2\pi q}{3} r^2,$$

wo wiederum r den Centralabstand des Punktes bezeichnet.

Die Formeln (7a, i.) zeigen, dass V_a und V_i durch ganz verschiedene Functionen von r dargestellt sind. Trotzdem nehmen V_a und V_i , sobald man die Punkte a und i der Kugeloberfläche sich mehr und mehr nähern, und schliesslich auf dieser Fläche zusammentreffen lässt, im Augenblicke des Zusammentreffens denselben Werth an. Denn für $r = A$ geht V_a in $\frac{4\pi q}{3} A^2$, und V_i ebenfalls in $\frac{4\pi q}{3} A^2$ über. Solches mag angedeutet werden durch die Formel:

$$(7f.) \quad \bar{V}_a = \bar{V}_i = \frac{4\pi q}{3} A^2,$$

wo durch die *horizontalen Striche* bemerklich gemacht werden soll, dass hier von denjenigen Werthen die Rede ist, welche V_a und V_i an der Kugeloberfläche besitzen.

Ebenso wie V_a und V_i an der Oberfläche denselben Werth haben, ebenso gilt Gleiches auch von $\frac{dV_a}{dr}$ und $\frac{dV_i}{dr}$. Aus (6a, i.) folgt nämlich durch Differentiation nach r :

$$(8a.) \quad \frac{dV_a}{dr} = - \frac{4\pi q}{3} \frac{A^3}{r^2},$$

$$(8i.) \quad \frac{dV_i}{dr} = - \frac{4\pi q}{3} r.$$

Und hieraus ergibt sich, falls man die beiden Punkte a und i auf der Kugeloberfläche mit einander zusammentreffen lässt, d. h. in beiden Formeln $r = A$ macht:

$$(8f.) \quad \frac{\overline{dV_a}}{dr} = \frac{\overline{dV_i}}{dr} = - \frac{4\pi q}{3} A.$$

Anders hingegen verhält es sich mit den zweiten Differentialquotienten. Denn aus (8a, i.) folgt:

$$(9a.) \quad \frac{d^2 V_a}{dr^2} = + \frac{8\pi q}{3} \frac{A^3}{r^3},$$

$$(9i.) \quad \frac{d^2 V_i}{dr^2} = - \frac{4\pi q}{3};$$

und hieraus ergibt sich für $r = A$:

$$(9f.) \quad \frac{d^2 V_a}{dr^2} = + \frac{8\pi q}{3}; \quad \text{hingegen: } \frac{d^2 V_i}{dr^2} = - \frac{4\pi q}{3}.$$

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Bezeichnet V das Potential einer homogenen Kugel auf einen variablen Punkt, dessen Centralabstand r ist, so werden V und $\frac{dV}{dr}$ Functionen von r sein, die bei einer beliebigen Bewegung jenes Punktes, selbst bei einem Hindurchgehen desselben durch die Kugeloberfläche, sich Schritt für Schritt in stetiger Weise ändern. Hingegen wird $\frac{d^2 V}{dr^2}$ in dem Augenblicke, wo der Punkt durch die Kugeloberfläche hindurchgeht, eine sprungweise Aenderung erleiden.

Dabei mag historisch bemerkt sein, dass dieser Satz einer weitern Verallgemeinerung fähig ist. Denkt man sich nämlich einen materiellen Körper von ganz beliebiger Gestalt gegeben, dessen Dichtigkeit nach Belieben eine stetige oder unstetige Function der Coordinaten, jedoch überall endlich ist, und bezeichnet man das Potential dieses Körpers auf irgend einen Punkt (x, y, z) mit V , so werden

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

Functionen von (x, y, z) sein, welche bei einer beliebigen Bewegung dieses Punktes, auch bei einem Hindurchgehen desselben durch die Körperoberfläche, sich Schritt für Schritt in stetiger Weise ändern. Hingegen wird solches nicht mehr gelten von den zweiten Ableitungen des Potentials V nach (x, y, z) .

Man findet diesen Satz bewiesen in *Dirichlet's Vorlesungen*, herausgegeben von *Grube*. Leipzig bei Teubner, 1876. pg. 12.

§ 6.

Weiteres über die Laplace'sche Differentialgleichung.

Vervollständigung derselben durch Poisson.

Denkt man sich einen beliebigen Körper gegeben, der z. B. auch mit irgend welchen innern Hohlräumen versehen sein kann, und bezeichnet man das Potential dieses Körpers auf den variablen Punkt (x, y, z) mit V , so wird die Gleichung stattfinden:

$$(1.) \quad \Delta V = 0, \quad \text{d. i.} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Oder genauer ausgedrückt: Es wird diese Gleichung stattfinden, so lange der Punkt (x, y, z) , mag er nun ausserhalb des Körpers oder innerhalb eines im Körper befindlichen Hohlraumes gedacht werden,

von der Körpermasse selbst durch irgend welchen (wenn auch noch so kleinen) Zwischenraum getrennt bleibt.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem schon früher bewiesenen Satz pg. 9. Es fragt sich aber nun, ob diese Gleichung (1.) auch dann noch in Kraft bleibt, wenn der Punkt hart an die Körperoberfläche herangeht, oder gar in das Innere der Körpermasse hineindringt.

Liegt der Punkt (x, y, z) irgendwo im Innern der Körpermasse, so construire man, ebenfalls innerhalb der Körpermasse, eine kleine den Punkt (x, y, z) umschliessende Kugelfläche, jedoch in solcher Weise, dass das Centrum (α, β, γ) derselben nicht gerade mit (x, y, z) zusammenfällt. Setzt man nun voraus, die Dichtigkeit q des Körpers sei eine *stetige* Function der Coordinaten, so wird man jene Kugelfläche so klein sich denken können, dass der Werth der Dichtigkeit innerhalb der Kugelfläche als *constant* betrachtet werden darf. Dieser constante Werth mag C heissen; so dass also

$$(2.) \quad q(\alpha, \beta, \gamma) = C \quad \text{und} \quad q(x, y, z) \quad \text{ebenfalls} = C$$

ist, weil die Punkte (α, β, γ) und (x, y, z) beide *innerhalb* der Kugelfläche liegen.

Die Körpermasse M wird durch diese Kugelfläche in zwei Theile M' und M'' zerlegt, von denen der erste innerhalb, der letztere ausserhalb der Kugelfläche liegt. Und dem entsprechend zerfällt das Potential V in zwei analoge Theile V' und V'' :

$$(3.) \quad V = V' + V'',$$

woraus z. B. folgt:

$$(4.) \quad \Delta V = \Delta V' + \Delta V''.$$

Der Ausdruck $\Delta V''$ subordinirt sich aber, weil der Punkt (x, y, z) von der Masse M'' durch Zwischenräume getrennt ist, ohne

Weiteres dem Satz (1.). Demgemäss ist also $\Delta V'' = 0$; so dass also die Formel (4.) sich reducirt auf:

$$(5.) \quad \Delta V = \Delta V'.$$

Nun ist der Theil M' nichts Anderes als eine *kleine homogene Kugel*, deren constante Dichtigkeit mit C bezeichnet worden ist. Das Potential V' dieses Theiles M' auf den Punkt (x, y, z) hat daher [vgl. (7i.) pg. 14] den Werth:

$$V' = 2\pi C A^2 - \frac{2\pi C}{3} r^2,$$



d. i.

$$V' = 2\pi C A^2 - \frac{2\pi C}{3} [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2],$$

wo A den *Radius* der kleinen Kugel vorstellt. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = -\frac{4\pi C}{3} (x - \alpha), \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} = -\frac{4\pi C}{3},$$

u. s. w.; folglich:

$$\Delta V' = -4\pi C.$$

Dies in (5.) substituirt, erhält man:

$$(6.) \quad \Delta V = -4\pi C.$$

Beachtet man nun die Bedeutung von C , dass nämlich dieses C den Werth der Körperdichtigkeit q an *derjenigen* Stelle bezeichnet, an welcher der sollicitirte Punkt (x, y, z) sich befindet, so gelangt man auf Grund der Formel (6.) zu folgendem Satz:

Denkt man sich irgend einen Körper gegeben, dessen Dichtigkeit q eine stetige Function der Coordinaten ist, und bezeichnet man das Potential dieses Körpers auf einen variablen Punkt (x, y, z) mit V , so wird der Laplace'sche Differentialausdruck

$$(7.) \quad \Delta V \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

falls der Punkt (x, y, z) im Innern der Masse des Körpers liegt, nicht $= 0$, sondern $= -4\pi q$ sein, wo q den daselbst vorhandenen Werth der Dichtigkeit vorstellt.

Dieser Beweis wurde in den *F. Neumann'schen* Vorlesungen im Jahre 1852 oder 1853 mitgetheilt. Im Sommersemester 1859 hingegen wurde von *F. Neumann* für den in Rede stehenden Satz ein *strengerer* Beweis gegeben. Dieser letztere ist im Wesentlichen derselbe, den man auch in *Dirichlet's* Vorlesungen findet. Vgl. die *Grube'sche* Edition derselben, Leipzig bei Teubner 1867, pg. 18–28.

§ 7.

Anwendung der Laplace'schen Differentialgleichung zur Berechnung des Potentials einer homogenen Kugel.

Das Potential V einer *homogenen Kugel* auf den Punkt (x, y, z) kann offenbar (wie nämlich aus der Symmetrie sich ergibt) *nur* abhängen vom Centralabstande r dieses Punktes. Wir wollen nun zeigen, wie man diese Function

$$(8.) \quad V = V(r)$$

auf Grund der *Laplace'schen Differentialgleichung* (1.) resp. (7.) wirklich zu bestimmen im Stande ist. Dabei wollen wir von den bereits früher

(pg. 13, 14) über dieses Potential V erlangten Kenntnissen für den Augenblick völlig absehen.

Nimmt man das Kugelcentrum O zum Anfangspunkt des Coordinatensystems, so ist offenbar

$$(9.) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{mithin z. B.} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Da nun V *lediglich von r abhängt*, während r seinerseits von x, y, z dependirt, so wird:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \frac{x}{r}.$$

Differenzirt man diese Formel nochmals partiell nach x , so ergibt sich, weil $\frac{dV}{dr}$ (ebenso wie V selber) *lediglich von r abhängt*:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{dr^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{x}{r} + \frac{dV}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \right),$$

also, falls man für $\frac{\partial r}{\partial x}$ seinen Werth (9.) einsetzt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{dr^2} \left(\frac{x}{r} \right)^2 + \frac{dV}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right).$$

Addirt man zu dieser Formel die analogen Formeln für $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, so ergibt sich mit Rücksicht auf (9.):

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{dV}{dr} \frac{2}{r},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(10.) \quad \Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right).$$

Liegt nun der variable Punkt (x, y, z) *außerhalb der Kugel*, so ist nach (1.): $\Delta V = 0$, d. i. nach (10.):

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0,$$

woraus durch Integration folgt: $r^2 \frac{dV}{dr} = \text{Const.} = C$, d. i.

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C}{r^2}.$$

Hieraus folgt durch nochmalige Integration

$$(11.) \quad V = -\frac{C}{r} + D,$$

wo C und D noch *unbekannte* Constanten vorstellen.

Für *äußerst weit entfernte* Punkte muss aber das Potential V von solcher Beschaffenheit sein, als wäre die ganze Masse der gegebenen Kugel in ihrem Schwerpunkt d. i. in ihrem Mittelpunkt vereinigt [vgl. pg. 10, 11]. Mit andern Worten: Die Formel (11.) muss für ein *sehr grosses*

r die Gestalt annehmen: $V = \frac{M}{r}$, wo M die Masse der Kugel vorstellt. Somit sieht man, dass $C = -M$ und $D = 0$ sein muss. Substituirt man diese Werthe von C, D in (11.), so ergibt sich:

$$(12.) \quad V = \frac{M}{r};$$

was in Einklang ist mit dem früheren Resultate pg. 13.

Liegt nun ferner der variable Punkt (x, y, z) innerhalb der Kugel, so ist nach (7.): $\Delta V = -4\pi q$, d. i. nach (10.):

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -4\pi q r^2,$$

wo q die *constante* Dichtigkeit der gegebenen Kugel vorstellt. Hieraus folgt durch Integration:

$$(13.) \quad r^2 \frac{dV}{dr} = C - \frac{4\pi q}{3} r^3.$$

Die Integrationsconstante C bestimmt sich einfach dadurch, dass man die Formel (13.) auf den speciellen Fall: $r = 0$ anwendet. Denn alsdann ergibt sich: $0 = C - 0$, d. i. $C = 0$. Dies in (13.) substituirt, erhält man:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi q}{3} r$$

und hieraus durch Integration:

$$(14.) \quad V = D - \frac{2\pi q}{3} r^2.$$

Die Constante D bestimmt sich durch Anwendung der Formel (14.) auf den speciellen Fall: $r = 0$. Denn alsdann ergibt sich: $V_0 = D + 0$, wo V_0 das Potential der Kugel auf ihren *Mittelpunkt* vorstellt. Man erhält also $D = V_0$. Dies in (14.) substituirt, ergibt sich:

$$(15.) \quad V = V_0 - \frac{2\pi q}{3} r^2.$$

Das dem Mittelpunkte entsprechende Potential V_0 lässt sich nun leicht durch *directe Rechnung* finden. Man erhält:

$$V_0 = q \int_0^A \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 dr \cdot \sin \vartheta d\vartheta \cdot d\varphi}{r} = 2\pi q A^2,$$

wo A den Radius der Kugel vorstellt. Somit geht die Formel (15.) schliesslich über in:

$$(16.) \quad V = 2\pi q A^2 - \frac{2\pi q}{3} r^2;$$

was in Einklang steht mit unserm frühern Resultate pg. 14.

Bemerkung. — In analoger Weise kann man die Laplace'sche Differentialgleichung z. B. auch benutzen zur Berechnung des Potentials einer von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten *homogenen Kugelschaale*.

§ 8.

Transformation des Laplace'schen Differentialausdrucks auf Cylindercoordinaten.

Zwischen den *rechtwinkligen Coordinaten* x, y, z und den *Cylindercoordinaten* x, ϱ, φ finden die Relationen statt:

$$(1.) \quad \begin{aligned} x &= x, \\ y &= \varrho \cos \varphi, \\ z &= \varrho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Differentiation:

$$(2.) \quad \begin{aligned} dx &= dx, \\ dy &= \cos \varphi \cdot d\varrho - \varrho \sin \varphi \cdot d\varphi, \\ dz &= \sin \varphi \cdot d\varrho + \varrho \cos \varphi \cdot d\varphi, \end{aligned}$$

mithin:

$$(3.) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2.$$

Dabei bezeichnet ds das zwischen den Punkten (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ liegende *Linielement*. Ueberdies ergibt sich durch Auflösung der beiden letzten der Gleichungen (2.) nach $d\varrho$ und $d\varphi$:

$$(4.) \quad \begin{aligned} d\varrho &= + \cos \varphi \cdot dy + \sin \varphi \cdot dz, \\ \varrho d\varphi &= - \sin \varphi \cdot dy + \cos \varphi \cdot dz, \end{aligned}$$

und folglich:

$$(5.) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \varrho}{\partial y} = + \cos \varphi, & \frac{\partial \varrho}{\partial z} = + \sin \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\sin \varphi}{\varrho}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} = + \frac{\cos \varphi}{\varrho}. \end{cases}$$

Es sei nun $F = F(x, y, z)$ eine ganz willkürlich gegebene Function. Wir stellen uns die Aufgabe, in dem Ausdrücke

$$(6.) \quad \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

statt x, y, z die *Cylindercoordinaten* x, ϱ, φ einzuführen. Während also x beizubehalten ist, sollen y, z durch ϱ, φ ersetzt werden.

Zuvörderst ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

also mit Rücksicht auf (5.):

$$(\alpha.) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \varrho} \cos \varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\varrho},$$

und ebenso:

$$(\beta.) \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \varrho} \sin \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\varrho}.$$

Aus der Formel (α .) ergibt sich durch partielle Differentiation nach y :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial [\]}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial [\]}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

also nach (5.):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial [\]}{\partial \varrho} \cos \varphi - \frac{\partial [\]}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\varrho},$$

wo unter $[\]$ die *rechte Seite* der Formel (α .) zu verstehen ist. Substituirt man aber für diesen Ausdruck $[\]$ seine eigentliche Bedeutung, so erhält man:

$$\begin{aligned} (\alpha'.) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varrho} \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho^2} - \\ &\quad - \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho \partial \varphi} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\varrho} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\varrho^2}. \end{aligned}$$

Und in analoger Weise ergibt sich aus (β .):

$$\begin{aligned} (\beta'.) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varrho} \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho^2} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho \partial \varphi} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\varrho} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\varrho^2}. \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden Formeln (α' .) und (β' .) folgt nun sofort:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial F}{\partial \varrho} \frac{1}{\varrho} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \frac{1}{\varrho^2}.$$

Dies aber in (6.) substituirt, erhält man:

$$(7.) \quad \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(8.) \quad \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial F}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

Hiermit ist die Transformation von ΔF auf die Cylindercoordinaten x, ϱ, φ ausgeführt, unsere Aufgabe also absolvirt.

§ 9.

Transformation des Laplace'schen Differentialausdrucks auf die Polarecoordinaten.

Zwischen den *rechtwinkligen Coordinaten* x, y, z und den *Polarcoordinaten* r, ϑ, φ finden die Relationen statt:

$$\begin{aligned} (1.) \quad x &= r \cos \vartheta, \\ y &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \vartheta \cdot dr - r \sin \vartheta \cdot d\vartheta, \\ (2.) \quad dy &= \sin \vartheta \cos \varphi \cdot dr + r \cos \vartheta \cos \varphi \cdot d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi \cdot d\varphi, \\ dz &= \sin \vartheta \sin \varphi \cdot dr + r \cos \vartheta \sin \varphi \cdot d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Demgemäss ist:

$$(3.) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dr)^2 + (rd\vartheta)^2 + (r \sin \vartheta d\varphi)^2,$$

wo ds das zwischen (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ liegende *Linielement* vorstellt. Ferner ergibt sich aus den Gleichungen (2.) durch Auflösung nach $dr, d\vartheta, d\varphi$:

$$\begin{aligned} dr &= + \cos \vartheta \cdot dx + \sin \vartheta \cos \varphi \cdot dy + \sin \vartheta \sin \varphi \cdot dz, \\ (4.) \quad rd\vartheta &= - \sin \vartheta \cdot dx + \cos \vartheta \cos \varphi \cdot dy + \cos \vartheta \sin \varphi \cdot dz, \\ r \sin \vartheta d\varphi &= - \sin \varphi \cdot dy + \cos \varphi \cdot dz, \end{aligned}$$

und folglich:

$$(5.) \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \vartheta, & \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \vartheta \cos \varphi, & \frac{\partial r}{\partial z} = \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{\sin \vartheta}{r}, & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r}, & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta}. \end{cases}$$

Es sei nun $F = F(x, y, z)$ eine ganz beliebig gegebene Function. Wir stellen uns die Aufgabe, den Ausdruck

$$(6.) \quad \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

zu transformiren auf die Polarcoordinaten r, ϑ, φ .

Zuvörderst ergibt sich mit Rücksicht auf (5.):

$$(\alpha.) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \cos \vartheta + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \left(-\frac{\sin \vartheta}{r} \right) + 0,$$

und hieraus folgt durch abermalige Differentiation nach x , und wiederum mit Rücksicht auf (5.):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial [\]}{\partial r} \cos \vartheta + \frac{\partial [\]}{\partial \vartheta} \left(-\frac{\sin \vartheta}{r} \right) + 0,$$

wo unter $[\]$ die *rechte Seite* der Formel $(\alpha.)$ zu verstehen ist. Lässt man aber für diesen Ausdruck $[\]$ seine eigentliche Bedeutung wirklich eintreten, so erhält man:

$$\begin{aligned} (\alpha'.) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \cos^2 \vartheta - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \vartheta} \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{r} + \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\sin^2 \vartheta}{r} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{r^2}. \end{aligned}$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich (was hier nicht weiter ausgeführt werden soll) für $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$. Substituirt man alsdann aber all' diese Ausdrücke in (6.), so ergibt sich:

$$(7.) \quad r^2 \Delta F = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

Das mittlere Glied der rechten Seite kann offenbar auch so geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\partial F}{\partial \mu} \right),$$

oder, falls man $\cos \vartheta = \mu$, mithin $(-\sin \vartheta) \partial \vartheta = \partial \mu$ setzt, auch so:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right);$$

sodass also die Formel (7.) übergeht in:

$$(8.) \quad r^2 \Delta F = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

Durch diese Formeln (7.) und (8.) ist aber die Transformation des Ausdrucks ΔF auf die Polarcoordinaten r, ϑ, φ oder r, μ, φ vollendet. Dabei steht μ für $\cos \vartheta$.

Bemerkung. — Die Gleichungen

$$(\alpha.) \quad r = \text{Const.}, \quad \vartheta = \text{Const.}, \quad \varphi = \text{Const.}$$

repräsentiren offenbar drei zu einander *orthogonale* Flächensysteme, d. i. drei Flächensysteme, durch welche der Raum in lauter unendlich kleine *rechtwinklige Parallelepipeda* zerlegt wird.

Das *erste* dieser Flächensysteme besteht aus *concentrischen Kugelflächen*, deren Radius r von 0 bis ∞ variirt.

Das *zweite* Flächensystem besteht aus *Rotationskegeln*, deren gemeinschaftliche geometrische Axe die x -Axe des Coordinatensystems ist [vgl. (1.)], und deren Parameter ϑ von 0° bis 180° variirt. Man hat dabei also zu unterscheiden zwischen der durch $\vartheta = c$ und der durch $\vartheta = 180^\circ - c$ dargestellten Kegelfläche, von denen die eine das Spiegelbild der andern ist in Bezug auf die Aequatorialebene, d. i. in Bezug auf die yz -Ebene.

Das *dritte* Flächensystem endlich besteht aus den durch die x -Axe gelegten *Meridianebenen*, deren Azimuth φ von 0° bis 360° variirt. Man hat dabei also jede einzelne Meridianebene als eine *Halbebene* aufzufassen, die auf der einen Seite von der x -Axe *begrenzt* ist.

Will man alle Punkte einer um den Anfangspunkt beschriebenen *Kugelfläche* erhalten, so hat man den Variablen ϑ und φ die Spielräume anzuweisen:

$$(\beta.) \quad \begin{aligned} \vartheta &= 0^\circ \dots 180^\circ, \\ \varphi &= 0^\circ \dots 360^\circ. \end{aligned}$$

Zweite Bemerkung. — Irgendwo im Raume mag ein Punkt p markirt werden mit den Coordinaten r, ϑ, φ . Und in unmittelbarer Nähe dieses Punktes

$$(\gamma.) \quad p(r, \vartheta, \varphi)$$

mögen drei andere Punkte $p_r, p_\vartheta, p_\varphi$ markirt werden, deren Coordinaten folgende sein sollen:

$$(\delta.) \quad p_r(r + dr, \vartheta, \varphi), \quad p_\vartheta(r, \vartheta + d\vartheta, \varphi), \quad p_\varphi(r, \vartheta, \varphi + d\varphi).$$

Gleichzeitig mögen die von p nach $p_r, p_\vartheta, p_\varphi$ laufenden Linienelemente respective mit $ds_r, ds_\vartheta, ds_\varphi$ bezeichnet sein. Diese drei Linienelemente

$$(\epsilon.) \quad ds_r = (pp_r), \quad ds_\vartheta = (pp_\vartheta), \quad ds_\varphi = (pp_\varphi),$$

welche offenbar im Punkte p gegen einander *senkrecht* stehen, besitzen alsdann [nach (3.) pg. 22] die Werthe:

$$(\xi.) \quad ds_r = dr, \quad ds_\vartheta = r d\vartheta, \quad ds_\varphi = r \sin \vartheta d\varphi.$$

Und zwar repräsentiren diese Ausdrücke die *absoluten* (d. i. die positiven) Längen dieser drei Linienelemente, falls man nur voraussetzt, dass $dr, d\vartheta$ und $d\varphi$ *positiv* sind. Denn r und $r \sin \vartheta$ sind *eo ipso* unter allen Umständen positiv, weil ϑ zwischen 0° und 180° bleibt.

Es sei nun V das Potential eines *beliebig gegebenen Massensystems* in Bezug auf den Punkt $p(r, \vartheta, \varphi)$. Bezeichnet man alsdann die von diesem Massensysteme auf den Punkt $p(r, \vartheta, \varphi)$ ausgeübte *beschleunigende Kraft**) mit R , so sind die den Richtungen $ds_r, ds_\vartheta, ds_\varphi$ entsprechenden Componenten dieser Kraft R sofort angebbar auf Grund der allgemeinen Formel (15.) pg. 5. Man erhält nämlich:

$$\begin{aligned} R \cos(R, ds_r) &= -f \frac{dV}{ds_r}, \\ (\eta.) \quad R \cos(R, ds_\vartheta) &= -f \frac{dV}{ds_\vartheta}, \\ R \cos(R, ds_\varphi) &= -f \frac{dV}{ds_\varphi}. \end{aligned}$$

Die in diesen Formeln enthaltenen drei Zähler dV haben offenbar *verschiedene* Bedeutungen. Das dV in der *ersten* Formel ($\eta.$) repräsentirt z. B. den dem Linienelement ds_r entsprechenden Zuwachs, d. i. die Differenz derjenigen Werthe, welche V in p und p_r besitzt, und hat also [nach ($\gamma.$), ($\delta.$)] den Werth:

*) Unter der auf einen Punkt p ausgeübten *beschleunigenden* Kraft ist bekanntlich diejenige zu verstehen, welche auf denselben ausgeübt wird, falls man ihn auffasst als einen materiellen Punkt von der Masse *Eins*.

$$dV = V(r + dr, \vartheta, \varphi) - V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial r} dr.$$

Ferner repräsentirt das dV in der *zweiten* Formel (η .) den dem Linienelemente ds_{ϑ} entsprechenden Zuwachs, und hat daher den Werth:

$$dV = V(r, \vartheta + d\vartheta, \varphi) - V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial \vartheta} d\vartheta.$$

Endlich findet man für das in der *dritten* Formel (η .) enthaltene dV den Werth:

$$dV = V(r, \vartheta, \varphi + d\varphi) - V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Substituirt man aber diese Werthe der dV s in den drei Formeln (η .), und substituirt man daselbst gleichzeitig für ds_r , ds_{ϑ} , ds_{φ} die Werthe (ξ .), so erhält man:

$$\begin{aligned} R \cos(R, ds_r) &= -f \frac{\partial V}{\partial r}, \\ (\vartheta.) \quad R \cos(R, ds_{\vartheta}) &= -f \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ R \cos(R, ds_{\varphi}) &= -f \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Setzt man schliesslich [ebenso wie beim Uebergange von (7.) zu (8.), pg. 23] $\cos \vartheta = \mu$, so kann man diese Componenten auch so schreiben:

$$\begin{aligned} R \cos(R, ds_r) &= -f \frac{\partial V}{\partial r}, \\ (\pi.) \quad R \cos(R, ds_{\vartheta}) &= +f \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \frac{\partial V}{\partial \mu}, \\ R \cos(R, ds_{\varphi}) &= -f \frac{1}{r \sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Von diesen Formeln soll später Gebrauch gemacht werden in der *Theorie des Erdmagnetismus* (d. i. im sechsten Capitel dieses Werkes).

Dritte Bemerkung. — Die drei in (ξ .) genannten Linienelemente ds_r , ds_{ϑ} , ds_{φ} gehen vom Punkte (r, ϑ, φ) aus, und stehen daselbst (wie schon bemerkt wurde) *auf einander senkrecht*. Und zwar repräsentirt ds_r die *Normale* der durch den Punkt (r, ϑ, φ) gehenden Kugelfläche, während ds_{ϑ} und ds_{φ} *auf* dieser Kugelfläche liegen. Das durch ds_{ϑ} und ds_{φ} bestimmte unendlich kleine Rechteck kann daher angesehen werden als ein *Element der Kugelfläche*. Bezeichnet man dieses *Flächenelement* mit do , so ergibt sich [vgl. (ξ .)]:

$$(\varrho.) \quad do = ds_{\vartheta} ds_{\varphi} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Versteht man also unter $F = F(\vartheta, \varphi)$ eine beliebig gegebene Function, und soll das über alle Elemente do der Kugelfläche ausgedehnte Integral

$$(\sigma.) \quad J = \iint F d\sigma$$

berechnet werden, so kann man für $d\sigma$ den Werth $(\sigma.)$ einsetzen, und erhält in solcher Weise:

$$(\sigma_1.) \quad J = r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Hieraus folgt, falls man $\cos \vartheta = \mu$ setzt:

$$(\sigma_2.) \quad J = r^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} F d\mu d\varphi.$$

Man kann somit das Flächenelement $d\sigma$ der Kugelfläche, wie aus $(\sigma.)$, $(\sigma_1.)$, $(\sigma_2.)$ ersichtlich ist, nach Belieben

$$(\tau.) \quad = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad \text{oder auch} \quad = r^2 d\mu d\varphi$$

setzen. Im erstern Fall ist alsdann von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$, im letztern von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$ zu integrieren, während die Grenzen für φ beständig durch 0 und 2π dargestellt sein werden.

Zweites Capitel.*)

Ueber diejenigen speciellen Kugelfunctionen, welche nur von einem Argument abhängen.

Das Potential eines homogenen Körpers auf einen variablen Punkt (x, y, z) hat den Werth:

$$V = q \int \frac{dv}{E}, \quad [\text{vgl. pg. 6}].$$

Die wirkliche Berechnung dieses Integrals ist in vielen Fällen dadurch ausführbar, daß man den unter dem Integralzeichen befindlichen Ausdruck $\frac{1}{E}$ in eine geeignete Reihe entwickelt.

Wenn wir nun auf die für diesen Zweck geeigneten Reihenentwicklungen näher eingehen wollen, so werden wir dabei namentlich die *Laplace'sche Entwicklung* und die mit dieser zusammenhängende *Theorie der Kugelfunctionen* in Betracht zu ziehen haben.

§ 1.

Einführung der Kugelfunction $P_n(\mu)$.

Es seien zwei Punkte gegeben:

$$(1.) \quad \begin{cases} x = r \cos \vartheta, \\ y = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z = r \sin \vartheta \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 0, \\ z_1 = 0, \end{cases}$$

also zwei Punkte, von denen der erste (x, y, z) *variabel* sein soll, während der zweite (x_1, y_1, z_1) auf der x -Axe im Abstand 1 vom Anfangspunkte eine völlig *feste* Lage besitzt. Wir bezeichnen die

*) Dieses Capitel ist vom *Herausgeber* eingeschaltet worden, theils um dem Anfänger den Eingang in die Theorie der Kugelfunctionen ein wenig zu erleichtern, theils aber auch, um im Verlauf der folgenden Capitel störenden Unterbrechungen vorzubeugen.

gegenseitige Entfernung der beiden Punkte mit E , und stellen uns die Aufgabe, den Quotienten $\frac{1}{E}$ in eine convergente Reihe zu entwickeln.

Offenbar ist: $E^2 = 1 - 2r \cos \vartheta + r^2$, mithin:

$$(2.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}},$$

oder, was dasselbe:

$$(3.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{\sqrt{1 - r e^{i\vartheta}}} \frac{1}{\sqrt{1 - r e^{-i\vartheta}}}, \text{ wo } i = \sqrt{-1}.$$

Setzt man nun voraus, dass $r < 1$ sei, so ergeben sich mittelst des Binomischen Satzes die convergenten Entwicklungen:

$$(4.) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - r e^{i\vartheta}}} &= k_0 + k_1 r e^{i\vartheta} + k_2 r^2 e^{2i\vartheta} + k_3 r^3 e^{3i\vartheta} + \dots, \\ \frac{1}{\sqrt{1 - r e^{-i\vartheta}}} &= k_0 + k_1 r e^{-i\vartheta} + k_2 r^2 e^{-2i\vartheta} + k_3 r^3 e^{-3i\vartheta} + \dots, \end{aligned}$$

wo die k 's folgende Zahlen vorstellen:

$$(5.) \quad k_0 = 1, \quad k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad k_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad \text{etc. etc.},$$

und wo also allgemein k_n die Bedeutung hat*):

$$(5a.) \quad k_n = \frac{\Pi(2n)}{2^{2n} \Pi^2(n)}.$$

Substituirt man aber diese Entwicklungen (4.) in der Formel (3.), so erhält man für $\frac{1}{E}$ eine convergente Reihe von folgender Gestalt:

$$(6.) \quad \frac{1}{E} = P_0 + r P_1 + r^2 P_2 + r^3 P_3 + \dots + r^n P_n + \dots,$$

wo die P 's die Bedeutungen haben:

$$(7.) \quad \begin{aligned} P_0 &= k_0^2, \\ P_1 &= 2k_0 k_1 \cos \vartheta, \\ P_2 &= 2k_0 k_2 \cos 2\vartheta + k_1^2, \\ P_3 &= 2k_0 k_3 \cos 3\vartheta + 2k_1 k_2 \cos \vartheta, \\ P_4 &= 2k_0 k_4 \cos 4\vartheta + 2k_1 k_3 \cos 2\vartheta + k_2^2, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Um das Gesetz dieser Ausdrücke (7.) noch deutlicher hervortreten zu

*) In (5a.) bezeichnet $\Pi(n)$ die Gauss'sche Function, also diejenige Function, welche definiert ist durch die Formeln:

$\Pi(0) = 1, \quad \Pi(1) = 1, \quad \Pi(2) = 1 \cdot 2, \quad \Pi(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad \text{etc. etc.},$
allgemein: $\Pi(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n.$

lassen, sei bemerkt, dass der Werth von P_4 auch so geschrieben werden kann:

(8.) $P_4 = k_0 k_4 \cos 4\vartheta + k_1 k_3 \cos 2\vartheta + k_2 k_2 + k_3 k_1 \cos 2\vartheta + k_4 k_0 \cos 4\vartheta$,
und dass demgemäss der Werth von P_n folgendermassen lauten wird:

(9.) $P_n = k_0 k_n \cos n\vartheta + k_1 k_{n-1} \cos (n-2)\vartheta + k_2 k_{n-2} \cos (n-4)\vartheta$
 $\dots + k_n k_0 \cos n\vartheta$.

Diese P 's sind die von Legendre und Laplace eingeführten Functionen. Sie repräsentiren die einfachste Gattung der Kugelfunctionen, zugleich aber auch diejenige Gattung, aus welcher alle übrigen Kugelfunctionen sich in einfacher Art ableiten lassen; wie solches im weiteren Verlauf dieser Vorlesungen sich deutlich herausstellen wird.

Als Argument der Function P_n kann man nach Belieben entweder ϑ selber, oder auch $\cos \vartheta$ ansehen. Gewöhnlich thut man letzteres, und bezeichnet demgemäss diese Function mit

$$P_n(\cos \vartheta) \quad \text{oder} \quad P_n(\mu),$$

wo μ als *Abbreviatur* dienen soll für $\cos \vartheta$, [ebenso wie schon früher pg. 23]. Führt man nun in (7.) statt ϑ überall dieses $\mu = \cos \vartheta$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_0(\mu) = k_0^2, \\ P_1 &= P_1(\mu) = 2k_0 k_1 \mu, \\ P_2 &= P_2(\mu) = 2k_0 k_2 (2\mu^2 - 1) + k_1^2, \\ P_3 &= P_3(\mu) = 2k_0 k_3 (4\mu^3 - 3\mu) + 2k_1 k_2 \mu, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

oder, falls man gleichzeitig für die k 's ihre Werthe (5.) substituirt:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_0(\mu) = 1, \\ P_1 &= P_1(\mu) = \mu, \\ (10.) \quad P_2 &= P_2(\mu) = \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3 &= P_3(\mu) = \frac{5}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu, \\ P_4 &= P_4(\mu) = \frac{35}{8}\mu^4 - \frac{15}{4}\mu^2 + \frac{3}{8}, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Das Gesetz der hier auftretenden Zahlencoefficienten ist einstweilen schwer zu übersehen. Wir werden dasselbe später durch Betrachtungen *anderer* Art mit ziemlicher Leichtigkeit finden. Doch erkennt man bereits, dass die allgemeine Function $P_n(\mu)$ die Gestalt besitzen wird:

(11.) $P_n = P_n(\mu) = A_n \mu^n + B_n \mu^{n-2} + C_n \mu^{n-4} + D_n \mu^{n-6} \dots + L_n \mu^2$,
 wo der Exponent $\lambda = 0$ oder $= 1$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade, und wo $A_n, B_n, C_n, D_n, \dots L_n$ constante Coefficienten vorstellen.

Uebrigens ist von diesen Coefficienten wenigstens der *erste* — nämlich A_n — seinem allgemeinen Gesetz nach leicht angebbar. Beachtet man nämlich, dass $\cos n\vartheta, \cos(n-2)\vartheta, \cos(n-4)\vartheta$, etc. nach Potenzen von $\mu = \cos \vartheta$ in folgender Weise entwickelbar sind:

$$\begin{aligned} 2 \cos n\vartheta &= 2^n \mu^n + \mathfrak{A} \mu^{n-2} + \mathfrak{B} \mu^{n-4} + \mathfrak{C} \mu^{n-6} + \dots, \\ \text{(f.) } 2 \cos(n-2)\vartheta &= 2^{n-2} \mu^{n-2} + \mathfrak{A}' \mu^{n-4} + \mathfrak{B}' \mu^{n-6} + \dots, \\ 2 \cos(n-4)\vartheta &= 2^{n-4} \mu^{n-4} + \mathfrak{A}'' \mu^{n-6} + \dots, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, etc., $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$, etc., $\mathfrak{A}'', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}''$, etc. Constanten vorstellen, auf deren Werthe es nicht weiter ankommt, und substituirt man diese Ausdrücke (f.) in (9.), so erhält man:

$$\text{(g.) } P_n = k_0 k_n 2^n \mu^n + \mathfrak{R} \mu^{n-2} + \mathfrak{Q} \mu^{n-4} + \mathfrak{M} \mu^{n-6} + \dots,$$

wo $\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{M}$, etc. Constanten vorstellen. Vergleicht man aber diese Formel (g.) mit (11.), so folgt sofort:

$$A_n = k_0 k_n 2^n,$$

oder, falls man für k_0, k_n ihre Werthe aus (5.), (5a.) substituirt:

$$\text{(12.) } A_n = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi^2(n)}.$$

Hieraus ergibt sich z. B. [vgl. die Note pg. 28]:

$$\text{(12a.) } A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{1}, \quad A_2 = \frac{1.3}{1.2}, \quad A_3 = \frac{1.3.5}{1.2.3}, \text{ etc.};$$

was in Einklang ist mit den Formeln (10.).

Die Formel (11.) enthält den Satz, dass die Function $P_n(\mu)$ eine ganze rationale Function von μ vom n^{ten} Grade ist, und dass diese Function gerade oder ungerade sein wird, je nachdem der Index n eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt. Für ein gerades n ist daher

$$\text{(a.) } P_n(-\mu) = P_n(\mu),$$

und für ein ungerades n :

$$\text{(b.) } P_n(-\mu) = -P_n(\mu).$$

Diese beiden Formeln (a.) und (b.) können aber sofort zusammengefasst werden in folgende *allgemein gültige* Formel:

$$\text{(13.) } P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu);$$

woraus z. B. durch j malige Differentiation nach μ sich ergibt:

$$(13a.) \quad P_n^{(j)}(-\mu) = (-1)^{n+j} P_n^{(j)}(\mu).$$

Dabei ist unter $P_n^{(j)}(\mu)$ der j^{te} Differentialquotient von $P_n(\mu)$ nach μ zu verstehen.

Um schliesslich die Function $P_n(\mu)$ in einfacher Weise definiren zu können, haben wir zurückzublicken auf ihre Entstehungsweise, namentlich auf die Formeln (2.) und (6.). Durch Combination dieser beiden Formeln ergibt sich nämlich, falls man $\cos \vartheta = \mu$ setzt:

$$(14.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\mu), \quad (r < 1);$$

sodass man sich also folgendermassen ausdrücken kann:

Der Quotient

$$(15.) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}}$$

ist, falls man r positiv und < 1 voraussetzt, entwickelbar nach steigenden Potenzen von r . Bezeichnet man in dieser Entwicklung den Coefficienten von r^n mit $P_n(\mu)$, die Entwicklung selber also mit:

$$(16.) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\mu), \quad (r < 1),$$

so sind in solcher Weise die Functionen $P_n(\mu)$ vollkommen definirt. Diese $P_n(\mu)$ aber sind nichts Anderes als die von Legendre und Laplace eingeführten Kugelfunctionen.

§ 2.

Sich anschliessende Bemerkungen.

Erste Bemerkung. — Für sehr kleine Werthe von r ist der Ausdruck (15.) ohne Zweifel nach dem Binomischen Satze entwickelbar:

$$(a.) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = 1 + \frac{1}{2}(2r\mu - r^2) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(2r\mu - r^2)^2 + \dots$$

Andrerseits aber ist nach (16.):

$$(b.) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = r^0 P_0(\mu) + r^1 P_1(\mu) + r^2 P_2(\mu) + r^3 P_3(\mu) + \dots$$

Demgemäss müssen in den beiden Entwicklungen (a.) und (b.) die Coefficienten von r^0, r^1, r^2, r^3 , etc. einzeln einander gleich sein. Und man findet daher:

$$(c.) \quad \begin{aligned} P_0(\mu) &= 1, \\ P_1(\mu) &= \mu, \\ P_2(\mu) &= \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Kurz, man gelangt in solcher Weise zu *denselben* Formeln, die bereits früher, in (10.), auf *anderem* (und mühsamerem) Wege gefunden sind.

Zweite Bemerkung. -- Für $r < 1$ ergibt sich mittelst des Binomischen Satzes:

$$(\delta.) \quad \frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots, \quad (r < 1).$$

Gleichzeitig aber folgt aus (16.) für $\mu = 1$:

$$(\varepsilon.) \quad \frac{1}{1-r} = r^0 P_0(1) + r^1 P_1(1) + r^2 P_2(1) + r^3 P_3(1) + \dots$$

In diesen beiden Entwicklungen ($\delta.$) und ($\varepsilon.$) müssen die Coefficienten von r^0, r^1, r^2, \dots einzeln einander gleich sein. Somit folgt:

$$P_0(1) = 1, \quad P_1(1) = 1, \quad P_2(1) = 1, \quad \text{etc.};$$

allgemein:

$$(\xi.) \quad P_n(1) = 1.$$

Und hieraus ergibt sich mittelst der Formel (13.) sofort:

$$(\eta.) \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

Dritte Bemerkung. -- Nach (7.) ist:

$$(\kappa.) \quad P_4(\cos \vartheta) = 2k_0 k_4 \cos 4\vartheta + 2k_1 k_3 \cos 2\vartheta + k_2^2.$$

Die rechte Seite dieser Formel wird aber, weil alle k 's positiv sind [vgl. (5.)], *vergrössert* werden, falls man sämtliche Cosinus durch 1 ersetzt, und *verkleinert* werden, falls man alle Cosinus durch -1 ersetzt. Demgemäss gilt für jedwedes ϑ die Formel:

$$-2k_0 k_4 - 2k_1 k_3 + k_2^2 \leq P_4(\cos \vartheta) \leq 2k_0 k_4 + 2k_1 k_3 + k_2^2.$$

Die Ungleichheit *links* wird nunmehr noch weiter verstärkt werden, wenn man daselbst k_2^2 durch $-k_2^2$ ersetzt. Man erhält also:

$$(\lambda.) \quad -(2k_0 k_4 + 2k_1 k_3 + k_2^2) \leq P_4(\cos \vartheta) \leq +(2k_0 k_4 + 2k_1 k_3 + k_2^2).$$

Setzt man aber in ($\kappa.$) das Argument $\vartheta = 0$, so erhält man mit Rücksicht auf ($\xi.$):

$$1 = 2k_0 k_4 + 2k_1 k_3 + k_2^2;$$

wodurch die Formel ($\lambda.$) die Gestalt gewinnt:

$$(\mu.) \quad -1 < P_4(\cos \vartheta) \leq +1.$$

In analoger Weise wird sich offenbar die *allgemeine* Formel ergeben:

$$(\nu.) \quad -1 \leq P_n(\cos \vartheta) \leq +1;$$

so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Der Werth der Function $P_n(\cos \vartheta)$ liegt stets zwischen -1 und $+1$, welchen reellen Werth man dem Winkel ϑ auch beilegen mag. Oder etwas anders ausgedrückt: Der Werth der Function $P_n(\mu)$ liegt stets zwischen -1 und $+1$, so lange das Argument μ reell ist, und zwischen den Grenzen -1 und $+1$ eingeschlossen bleibt.

§ 3.

Die Differentialgleichung der Function $P_n(\mu)$.

Betrachtet man wieder die beiden Punkte (pg. 27):

$$(1.) \quad \begin{cases} x = r \cos \vartheta, \\ y = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z = r \sin \vartheta \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 0, \\ z_1 = 0, \end{cases}$$

und denkt man sich überdies im Punkte (x_1, y_1, z_1) eine gegebene Masse m_1 concentrirt, so wird das Potential dieser Masse auf den Punkt (x, y, z) den Werth haben:

$$(2.) \quad V = \frac{m_1}{E},$$

wo E den gegenseitigen Abstand der beiden Punkte bezeichnet. Dieses Potential entspricht der *Laplace'schen Differentialgleichung* [pg. 9]:

$$\Delta V = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

d. i. der Gleichung (vgl. pg. 23):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Hieraus folgt, falls man für V den Werth (2.) einsetzt:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \varphi^2} = 0,$$

oder, falls man für $\frac{1}{E}$ den Werth (14.) pg. 31

$$\frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\mu)$$

substituirt:

$$(3.) \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[n(n+1) P_n(\mu) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \right) \right] = 0.$$

Bei all' unsern Betrachtungen ist über die Variablen r und μ keinerlei Voraussetzung gemacht, ausser der, dass $r < 1$ sein soll. Demgemäss wird also z. B. auch die Formel (3.) gültig sein für jedes r , falls

nur dasselbe < 1 ist. Hieraus folgt, dass in dieser Formel die Coefficienten der einzelnen Potenzen von μ *einzelu* $= 0$ sein müssen; sodass man also erhält:

$$(4.) \quad n(n+1) P_n(\mu) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \right) = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Kugelfunction $P_n(\mu)$, oder genauer ausgedrückt: diejenige Differentialgleichung zweiter Ordnung, der die Function $P_n(\mu)$ Genüge leistet.

Mittelst dieser Differentialgleichung (4.) wollen wir jetzt die in der Formel (11.) pg. 30

$$(5.) \quad P_n(\mu) = A_n \mu^n + B_n \mu^{n-2} + C_n \mu^{n-4} \dots + L_n \mu^2$$

enthaltenen Constanten $A_n, B_n, C_n, \dots L_n$ zu berechnen versuchen. Substituiren wir den Werth (5.) in jener Gleichung (4.), so erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n[0 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad n(n-1)\mu^{n-2}] \\ + B_n[2(2n-1)\mu^{n-2} + (n-2)(n-3)\mu^{n-4}] \\ + C_n[4(2n-3)\mu^{n-4} + (n-4)(n-5)\mu^{n-6}] \\ + D_n[6(2n-5)\mu^{n-6} + (n-6)(n-7)\mu^{n-8}] \\ + \dots \end{array} \right\} = 0.$$

Da diese Gleichung stattfinden soll für *beliebige* Werthe der Variablen μ , so müssen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von μ *einzelu* $= 0$ sein. Demgemäss ergibt sich:

$$(6.) \quad \begin{aligned} B_n &= - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} A_n, \\ C_n &= - \frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} B_n, \\ D_n &= - \frac{(n-4)(n-5)}{6(2n-5)} C_n, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Da nun A_n bereits bekannt ist (pg. 30):

$$A_n = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi^2(n)},$$

so können wir aus den Formeln (6.) successive B_n, C_n, D_n, \dots berechnen. Substituiren wir sodann diese Werthe der Constanten $A_n, B_n, C_n, D_n, \dots$ in die Formel (5.), so erhalten wir schliesslich:

$$(7.) \quad P_n(\mu) = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi^2(n)} \left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} \right. \\ \left. - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \mu^{n-6} + \dots \right].$$

Das *Schlussglied* dieser Reihe anzugeben, ist *nicht* erforderlich. Denn wir erkennen sofort, dass die Reihe *von selber abbricht*, und dass ihr letztes Glied mit μ^0 oder μ^1 behaftet sein wird, je nachdem die Zahl n gerade oder ungerade ist.

§ 4.

Weitere Betrachtungen über die Differentialgleichung der Function $P_n(\mu)$.

Bezeichnet man zur Abkürzung die Function $P_n(\mu)$ mit f , und die Ableitungen dieser Function mittelst beigefügter Accente:

$$(8.) \quad f = P_n(\mu), \quad f' = P_n'(\mu), \quad f'' = P_n''(\mu), \quad \dots \quad f^{(j)} = P_n^{(j)}(\mu), \quad \dots,$$

so gilt nach (4.) für f folgende Differentialgleichung:

$$n(n+1)f + \frac{d}{d\mu}((1-\mu^2)f') = 0,$$

eine Gleichung, die man auch so schreiben kann:

$$(9a.) \quad n(n+1)f - 2\mu f' + (1-\mu^2)f'' = 0.$$

Hieraus folgt durch wiederholte Differentiation nach μ :

$$(9b.) \quad (n-1)(n+2)f' - 4\mu f'' + (1-\mu^2)f''' = 0,$$

$$(9c.) \quad (n-2)(n+3)f'' - 6\mu f''' + (1-\mu^2)f'''' = 0,$$

etc. etc. etc.,

mithin allgemein:

$$(9j.) \quad (n-j)(n+j+1)f^{(j)} - (2j+2)\mu f^{(j+1)} + (1-\mu^2)f^{(j+2)} = 0.$$

Offenbar ist nun die Function

$$F = f^{(j)} = P_n^{(j)}(\mu),$$

ebenso wie $P_n(\mu)$ selber, eine *ganze rationale* Function von μ . Mit Bezug auf (9j.) gelangt man daher zu folgendem Satz:

Erster Satz. — Die Function $F = P_n^{(j)}(\mu)$ ist eine *ganze rationale Function* von μ , und hat zugleich die *Eigenschaft*, der *Differentialgleichung*:

$$(10.) \quad (n-j)(n+j+1)F - (2j+2)\mu \frac{dF}{d\mu} + (1-\mu^2) \frac{d^2F}{d\mu^2} = 0$$

Genüge zu leisten.

Wir wollen gegenwärtig untersuchen, ob ausser dieser Function $F = P_n^{(j)}(\mu)$ noch irgend eine *andere ganze rationale* Function $\Phi = \Phi(\mu)$ existiren kann, die der Gleichung (10.) *ebenfalls* Genüge leistet.

Existirte eine derartige Function, so würde also

$$(11.) \quad (n-j)(n+j+1)\Phi - (2j+2)\mu \frac{d\Phi}{d\mu} + (1-\mu^2) \frac{d^2\Phi}{d\mu^2} = 0$$

sein. Multiplicirt man nun die Gleichungen (10.) und (11.) respective mit Φ und $-F$, und addirt, so ergibt sich:

$$-(2j+2)\mu \left(\Phi \frac{dF}{d\mu} - F \frac{d\Phi}{d\mu} \right) + (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} \left(\Phi \frac{dF}{d\mu} - F \frac{d\Phi}{d\mu} \right) = 0$$

oder, falls man

$$(12.) \quad \Phi \frac{dF}{d\mu} - F \frac{d\Phi}{d\mu} \quad \text{für den Augenblick} = \Omega$$

setzt:

$$2(j+1)\mu\Omega = (1-\mu^2) \frac{d\Omega}{d\mu},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\mu} = (j+1) \frac{2\mu}{1-\mu^2}.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\log \Omega = -(j+1) \log(1-\mu^2) + \log C,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\Omega = \frac{C}{(1-\mu^2)^{j+1}},$$

wo C eine Integrationsconstante vorstellt. Die letzte Formel nimmt, falls man für Ω seine eigentliche Bedeutung (12.) substituirt, die Gestalt an:

$$(13.) \quad \Phi \frac{dF}{d\mu} - F \frac{d\Phi}{d\mu} = \frac{C}{(1-\mu^2)^{j+1}}.$$

Nun sollte aber Φ , ebenso wie F , eine ganze rationale Function von μ sein, während j eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... vorstellt. Die Gleichung (13.) führt daher mit Nothwendigkeit zu dem Resultat, dass die Constante $C=0$ ist. Solches erkannt, nimmt jene Gleichung die Gestalt an:

$$\Phi \frac{dF}{d\mu} - F \frac{d\Phi}{d\mu} = 0,$$

d. i. die Gestalt:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{d\mu} = \frac{1}{F} \frac{dF}{d\mu}.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\log \Phi = \log F + \log D,$$

d. i.

$$(14.) \quad \Phi = DF,$$

wo D eine neue Integrationsconstante repräsentirt.

Unsere Annahme, es existire ausser F noch eine andere ganze rationale Function Φ , welche ebenfalls der Differentialgleichung (10.) Genüge leistet, führt also mit Nothwendigkeit zur Formel (14.), d. i. zu dem Resultate, dass diese neue Function Φ von der ursprünglichen F nur durch einen constanten Factor verschieden sein kann. — Dem-

gemäss können wir den vorhergehenden Satz (10.) folgendermassen vervollständigen:

Zweiter Satz. Soll irgend eine ganze rationale Function von μ der Differentialgleichung

$$(15.) \quad (n-j)(n+j+1)F - (2j+2)\mu \frac{dF}{d\mu} + (1-\mu^2) \frac{d^2F}{d\mu^2} = 0$$

Genüge leisten, so kann dieselbe von der Function $P_n^{(j)}(\mu)$ nur durch einen constanten Factor verschieden sein*).

Bemerkung. — Die soeben in (11a., b., c., ..) erhaltenen Gleichungen lauten:

$$(16.) \quad \begin{aligned} n(n+1)f - 2\mu f' + (1-\mu^2)f'' &= 0, \\ (n-1)(n+2)f' - 4\mu f'' + (1-\mu^2)f''' &= 0, \\ (n-2)(n+3)f'' - 6\mu f''' + (1-\mu^2)f'''' &= 0, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Substituiert man hier für f, f', f'', \dots ihre eigentlichen Bedeutungen (8.), und setzt man gleichzeitig $\mu = 1$, so erhält man:

$$(17.) \quad \begin{aligned} n(n+1)P_n(1) - 2P'_n(1) &= 0, \\ (n-1)(n+2)P'_n(1) - 4P''_n(1) &= 0, \\ (n-2)(n+3)P''_n(1) - 6P'''_n(1) &= 0, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Nun ist aber $P_n(1) = 1$ [vgl. pg. 32]. Somit ergibt sich aus (17.)

$$(18.) \quad \begin{aligned} P_n(1) &= 1, \\ P'_n(1) &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ P''_n(1) &= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4}, \\ P'''_n(1) &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \\ &\text{etc. etc.,} \end{aligned}$$

mithin allgemein:

$$(19.) \quad P_n^{(j)}(1) = \frac{(n-j+1)(n-j+2)(n-j+3) \cdots (n+j)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2j},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(20.) \quad P_n^{(j)}(1) = \frac{1}{2^j \Pi(j)} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)},$$

wo Π die Gauss'sche Function vorstellt. Hieraus ergibt sich, durch Anwendung der Formel (13a.) pg. 31:

$$(20a.) \quad P_n^{(j)}(-1) = (-1)^{n+j} \frac{1}{2^j \Pi(j)} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)}.$$

*) Dieser vom Herausgeber aufgestellte Satz, welcher an und für sich keine besondere Bedeutung in Anspruch nimmt, wird später im vierten Capitel, bei der Entwicklung von $P_n(\cos \gamma)$, wesentlich beitragen zur Vereinfachung und Abkürzung.

§ 5.

Darstellung der Function $I'_n(u)$ durch bestimmte Integrale.

Bezeichnet man bei einer gegebenen Ellipse

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

den dem Punkte (x, y) entsprechenden Radiusvector mit r , und sein Azimuth gegen die x -Axe mit φ , so ist offenbar $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$. Substituirt man aber diese Werthe von x, y in die vorstehende Gleichung, so ergibt sich:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}.$$

Denkt man sich nun den Flächeninhalt I' der Ellipse durch die von ihrem Mittelpunkte auslaufenden Radiivectores in lauter unendlich schmale Sectors zerlegt, so ist der Flächeninhalt eines solchen Sectors $= \frac{r^2 d\varphi}{2}$. Demgemäss erhält man für den Flächeninhalt I' der ganzen Ellipse die Formel:

$$\frac{I'}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 d\varphi}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}.$$

Bekanntlich ist aber $I' = ab\pi$. Dies in die letzte Formel substituirt, giebt:

$$ab = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}.$$

oder, falls man $\frac{1}{a^2} = A$ und $\frac{1}{b^2} = B$ setzt:

$$(1.) \quad \frac{1}{\sqrt{AB}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi}.$$

Setzt man nun hier:

$$A = 1 - re^{i\vartheta} \quad \text{und} \quad B = 1 - re^{-i\vartheta},$$

so erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - re^{i\vartheta}) \cos^2 \varphi + (1 - re^{-i\vartheta}) \sin^2 \varphi},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(2.) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - rf},$$

wo f die Bedeutung hat:

$$(3.) \quad f = e^{i\vartheta} \cos^2 \varphi + e^{-i\vartheta} \sin^2 \varphi = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos 2\varphi.$$

Demgemäss ist z. B.:

$$(4.) \quad \text{mod } f = \sqrt{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 2\varphi} = \sqrt{1 - (\sin \vartheta \sin 2\varphi)^2},$$

und folglich

$$(5.) \quad \text{mod } f \quad \text{stets} \quad \leq 1.$$

Setzt man nun wie früher voraus, dass $r < 1$ ist, so kann [mit Rücksicht auf (5.)] der in (2.) unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck in eine convergente, nach Potenzen von r fortschreitende Reihe entwickelt werden:

$$\frac{1}{1 - rf} = 1 + rf + r^2 f^2 + r^3 f^3 + \dots;$$

wodurch die Formel (2.) übergeht in:

$$(6.) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ r^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^n d\varphi \right\}.$$

Diese Reihenentwicklung der reciproken Wurzelgrösse schreitet, ebenso wie die in (16.) pg. 31 angegebene, fort nach den Potenzen der Variablen r . Demgemäss müssen in beiden Entwicklungen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von r *einzelu* einander gleich sein. Man erhält also:

$$(7.) \quad P_n(\mu) = P_n(\cos \vartheta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^n d\varphi,$$

oder, falls man für f seine eigentliche Bedeutung (3.) eintreten lässt:

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos 2\varphi)^n d\varphi,$$

oder, falls man für φ eine neue Integrationsvariable $\psi = 2\varphi$ einführt:

$$(8.) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \psi)^n d\psi.$$

Dies ist eine schon von *Laplace* gegebene Formel*).

*) *Laplace*: Méc. céle. Tome 5, Livre 11, Chap. 2, Nro. 3, form. (f.).

Bemerkung. — Aus (7.) folgt sofort:

$$\operatorname{mod} P_n(\cos \vartheta) < \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{mod} f)^n d\varphi,$$

also mit Rücksicht auf (5.):

$$\operatorname{mod} P_n(\cos \vartheta) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 1$$

Nun ist (da wir ϑ stets als *reell* voraussetzen) $P_n(\cos \vartheta)$ eine *reelle* Grösse, mithin der *Modul* dieser Grösse identisch mit ihrem *absoluten Werthe*. Die letzte Formel kann daher so geschrieben werden:

$$\operatorname{abs} P_n(\cos \vartheta) \leq 1;$$

was in Einklang steht mit unsern frühern Ergebnissen [vgl. pg. 33].

Man kann die in diesem Paragraph angestellte Untersuchung ein wenig verallgemeinern, indem man in der Formel (1.):

$$(9.) \quad \frac{1}{\sqrt{AB}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi}$$

für A und B folgende Werthe substituirt:

$$A = e^{i\lambda}(1 - re^{i\vartheta}) \quad \text{und} \quad B = e^{-i\lambda}(1 - re^{-i\vartheta}),$$

wo λ eine *neu* hinzutretende, *ganz willkürliche* Grösse vorstellen soll. Die Formel (9.) geht alsdann über in:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{e^{i\lambda}(1 - re^{i\vartheta}) \cos^2 \varphi + e^{-i\lambda}(1 - re^{-i\vartheta}) \sin^2 \varphi};$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(10.) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{g - rf},$$

wo f, g alsdann die Bedeutungen haben:

$$\begin{aligned} f &= e^{i(\vartheta+\lambda)} \cos^2 \varphi + e^{-i(\vartheta+\lambda)} \sin^2 \varphi \\ g &= e^{i\lambda} \cos^2 \varphi + e^{-i\lambda} \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

d. i. die Bedeutungen:

$$(11.) \quad \begin{aligned} f &= \cos(\vartheta + \lambda) + i \sin(\vartheta + \lambda) \cos 2\varphi, \\ g &= \cos \lambda + i \sin \lambda \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Entwickelt man jetzt die rechte Seite von (10.) nach Potenzen von r , so ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ r^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f^n d\varphi}{g^{n+1}} \right\};$$

und hieraus durch Vergleichung mit der Formel (16.) pg. 31:

$$P_n(\mu) = P_n(\cos \vartheta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f^n d\varphi}{g^{n+1}},$$

oder, falls man für f, g ihre Bedeutungen (11.) eintreten lässt, und gleichzeitig $2\varphi = \psi$ setzt:

$$(12.) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{[\cos(\vartheta + \lambda) + i \sin(\vartheta + \lambda) \cos \psi]^n d\psi}{[\cos \lambda + i \sin \lambda \cos \psi]^{n+1}}.$$

Setzt man hier das willkürlich zu wählende $\lambda = 0$, so gelangt man zurück zur *Laplace'schen Formel* (8.). Setzt man hingegen dieses $\lambda = -\vartheta$, so erhält man folgende *neue Formel*:

$$(13.) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{(\cos \vartheta - i \sin \vartheta \cos \psi)^{n+1}}.$$

Vertauscht man endlich in dieser ϑ mit $-\vartheta$, so ergibt sich:

$$(14.) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{(\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \psi)^{n+1}}.$$

Setzt man die beiden in (8.) und (14.) für $P_n(\cos \vartheta)$ gefundenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man eine im Wesentlichen schon von *Euler* gegebene Formel*).

Die Expositionen dieses Paragraphs entbehren in mancher Hinsicht der hinreichenden Strenge. So z. B. ist auf pg. 38 beim Uebergange von (1.) zu (2.) stillschweigend vorausgesetzt, dass die für zwei *positive reelle* Constanten A, B bewiesene Formel (1.) auch dann noch gültig bleibe, wenn man daselbst für A und B *complexe* Constanten substituirt. Diesen Mängeln, mit denen die Expositionen des Paragraphs behaftet sind, kann aber leicht abgeholfen werden durch Anwendung eines gewissen Satzes der allgemeinen Functionentheorie [vgl. C. Neumann's Vorlesungen über die Riemann'sche Theorie. Leipzig. 1884, pg. 35].

§ 6.

Darstellung der Function $P_n(x)$ durch einen Differentialquotienten.

Versteht man unter $f(x)$ die Function:

$$(1.) \quad f(x) = (x^2 - 1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1,$$

so ergibt sich durch wiederholte Differentiation nach x :

$$f'(x) = 6x^5 - 3 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x,$$

$$f''(x) = 5 \cdot 6x^4 - 3 \cdot 3 \cdot 4x^2 + 2 \cdot 3,$$

$$f'''(x) = 4 \cdot 5 \cdot 6x^3 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4x,$$

*) Vgl. *Heine's* Handbuch der Kugelfunctionen, zweite Auflage, Bd. 1, Seite 36.

mithin:

$$\frac{f'''(x)}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x,$$

also nach (10.) p. 29

$$\frac{f'''(x)}{2 \cdot 4 \cdot 6} = P_3(x),$$

oder, falls man für $f(x)$ seine eigentliche Bedeutung (1.) substituirt:

$$(2.) \quad P_3(x) = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{d^3(x^2 - 1)^3}{dx^3} = \frac{1}{2^3 \Pi(3)} \frac{d^3(x^2 - 1)^3}{dx^3}.$$

Ebenso ergibt sich *allgemein* (was hier nicht weiter ausgeführt werden soll) die Formel:

$$(3.) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Diese Formel wird gewöhnlich als die *Lagrange'sche* bezeichnet. In Wirklichkeit aber rührt sie her von *Rodrigues* (1815).*)

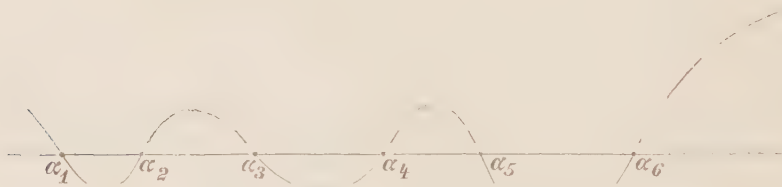
§ 7.

Ueber die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) = 0$.

Man denke sich die Function

$$f = f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6),$$

in welcher $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 < \alpha_6$ beliebig gegebene *reelle* Constanten sind, durch eine *Curve* dargestellt. Beachtet man, dass diese Curve die Abscissenachse im Ganzen nur 6mal, nämlich in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ durchschneiden kann, und dass ihre Ordinaten sowohl für $x = -\infty$ wie auch für $x = +\infty$ positiv sind, so erkennt man sofort dass diese Curve von folgender Gestalt sein muss:



dass sie also in $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ *sinken*, und in $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$ *steigen* wird.

Hieraus folgt, dass die abgeleitete Function $f' = f'(x)$ in den Punkten $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ *negativ*, und in den Punkten $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$ *positiv* ist.

*) Vgl. *Heine's Handbuch der Kugelfunctionen*, zweite Auflage, Bd. 1, Seite 20

Denkt man sich also eine *neue* Curve construirt zur Darstellung der Function $f' = f'(x)$, so wird dieselbe z. B. in α_1 eine *negative*, und in α_2 eine *positive* Ordinate besitzen. Folglich wird sie die Abscissenaxe irgendwo *zwischen* α_1 und α_2 durchschneiden. Im Ganzen ergeben sich in solcher Weise fünf Schnittpunkte dieser neuen Curve, von denen der erste β_1 zwischen α_1 und α_2 , der zweite β_2 zwischen α_2 und α_3 , der dritte β_3 zwischen α_3 und α_4 , der vierte β_4 zwischen α_4 und α_5 , endlich der fünfte β_5 zwischen α_5 und α_6 liegt. Demgemäss besitzt also die Gleichung

$$f'(x) = 0$$

fünf reelle Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$, die sämmtlich zwischen α_1 und α_6 liegen.

In derselben Weise weitergehend, erkennt man, dass die Gleichung

$$f''(x) = 0$$

vier reelle Wurzeln $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ hat, die sämmtlich zwischen β_1 und β_5 , mithin auch sämmtlich zwischen α_1 und α_6 gelegen sind. Sodann erkennt man weiter, dass die Gleichung

$$f'''(x) = 0$$

drei reelle Wurzeln $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ besitzen muss, die sämmtlich zwischen γ_1 und γ_4 , mithin auch sämmtlich zwischen α_1 und α_6 liegen.

Diese letzte Gleichung kann aber, weil $f(x)$ vom 6^{ten}, mithin $f'''(x)$ vom 3^{ten} Grade ist, überhaupt *nicht mehr* als drei Wurzeln besitzen. Und wir gelangen somit zu dem Resultate, dass *sämmtliche Wurzeln der Gleichung $f'''(x) = 0$ reell, und zwischen α_1 und α_6 gelegen sind.*

Specialisiren wir jetzt unsere Betrachtungen, indem wir

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1 \quad \text{und} \quad \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = +1,$$

mithin

$$(4.) \quad f(x) = (x+1)^3(x-1)^3 = (x^2-1)^3$$

machen, so gelangen wir zu dem Satz, dass die zugehörige Gleichung $f'''(x) = 0$, d. i. die Gleichung

$$(5.) \quad \frac{d^3(x^2-1)^3}{dx^3} = 0$$

lauter reelle Wurzeln hat, und dass diese Wurzeln *sämmtlich zwischen -1 und $+1$ liegen.*

Die linke Seite der Gleichung (5.) ist aber [vgl. (2.)], abgesehen von einem constanten Factor, identisch mit der Function $P_3(x)$. Dem-

gemäß sind wir also zu dem Resultate gelangt, dass *sämmtliche Wurzeln der Gleichung*

$$(6.) \quad P_3(x) = 0$$

reell, und zwischen -1 und $+1$ gelegen sind.

In analoger Weise wird sich offenbar, auf Grund der Formel (3.), darthun lassen, dass allgemein *sämmtliche Wurzeln der Gleichung*

$$(7.) \quad P_n(x) = 0$$

reell, und zwischen -1 und $+1$ gelegen sind. Und dies ist der Satz, der hier bewiesen werden sollte, und von welchem später Gebrauch zu machen ist.

Drittes Capitel.

Ueber die allgemeinen Kugelfunctionen mit zwei Argumenten.

Ebenso wie im vorhergehenden Capitel, ebenso werden wir auch im gegenwärtigen Capitel die reciproke Entfernung zweier Punkte (r, ϑ, φ) und $(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ in eine convergente Reihe zu entwickeln suchen, nur mit dem Unterschiede, dass wir gegenwärtig die Polarcoordinaten der beiden Punkte in ganz beliebiger Weise uns gegeben denken, — was damals nicht der Fall war.

In solcher Weise werden wir zum Begriff der *allgemeinen von zwei Argumenten abhängenden Kugelfunctionen* gelangen. Sodann aber werden wir, um in die eigentliche Theorie dieser Functionen einzudringen, Gebrauch machen von dem *Laplace'schen Sphäroid*. Unter diesem Sphäroid ist, wie sogleich bemerkt sein mag, ein Körper zu verstehen, der nahezu kugelförmig ist. Die Abweichungen von der Kugelform können einen beliebig complicirten Charakter darbieten. Nur wird vorausgesetzt, dass diese Abweichungen ausserordentlich klein sind.

§ 1.

Die reciproke Entfernung zweier Punkte.

Betrachtet man irgend zwei Punkte:

$$(1.) \quad \begin{cases} x = r \cos \vartheta, \\ y = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z = r \sin \vartheta \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = r_1 \cos \vartheta_1, \\ y_1 = r_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, \\ z_1 = r_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1; \end{cases} \cdot$$

bezeichnet man ferner den Winkel zwischen r und r_1 mit γ , und den gegenseitigen Abstand der beiden Punkte mit R , so ist offenbar*):

$$(2.) \quad \cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos (\varphi - \varphi_1)$$

*) Bezeichnet man nämlich die Punkte, in denen eine um den Anfangspunkt des Coordinatensystems mit dem Radius 1 beschriebene Kugelfläche von den Strahlen r, r_1 und der x -Axe getroffen wird, respective mit R, R_1 und X , so werden in dem sphärischen Dreieck RR_1X die drei Seiten gleich $\vartheta, \vartheta_1, \gamma$ sein, während der zu γ gegenüberliegende Winkel gleich $\varphi - \varphi_1$, resp. gleich $\varphi_1 - \varphi$ ist.

und

$$(3.) \quad E^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \gamma;$$

woraus z. B. folgt:

$$(4.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2\left(\frac{r_1}{r}\right) \cos \gamma + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2}}.$$

Entwickelt man aber diesen Ausdruck (4.) nach Maassgabe der früher gefundenen allgemeinen Formel (16.) pg. 31:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\mu + \rho^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(\mu), \quad (\rho < 1),$$

so erhält man sofort:

$$(5.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma), \quad (\text{vorausgesetzt } r_1 < r).$$

Und in analoger Weise wird man offenbar, falls $r_1 > r$ sein sollte, die analoge Formel erhalten:

$$(5a.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos \gamma), \quad (\text{vorausgesetzt } r_1 > r).$$

Die hier auftretenden Functionen $P_n(\cos \gamma)$ sind uns bereits bekannt. Es ist nämlich [nach (10.) pg. 29]:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \gamma) &= 1, \\ P_1(\cos \gamma) &= \cos \gamma, \\ (6.) \quad P_2(\cos \gamma) &= \frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2}, \\ P_3(\cos \gamma) &= \frac{5}{2} \cos^3 \gamma - \frac{3}{2} \cos \gamma, \\ &\text{etc. etc.}, \end{aligned}$$

und allgemein [nach (11.) pg. 30 und (7.) pg. 34]:

$$(7.) \quad P_n(\cos \gamma) = A_n \cos^n \gamma + B_n \cos^{n-2} \gamma + C_n \cos^{n-4} \gamma \cdots + L_n \cos^2 \gamma,$$

wo $\lambda = 0$, resp. $= 1$ ist, und $A_n, B_n, C_n, \dots L_n$ bestimmte Zahlen-coefficienten vorstellen. Das in diesen Functionen $P_n(\cos \gamma)$ enthaltene Argument $\cos \gamma$ hat nach (2.) den Werth

$$(8.) \quad \cos \gamma = \mu \mu_1 + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos(\varphi - \varphi_1),$$

d. i. den Werth:

$$(9.) \quad \begin{aligned} \cos \gamma &= \mu \mu_1 + (\sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi) (\sqrt{1 - \mu_1^2} \cos \varphi_1) \\ &\quad + (\sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi) (\sqrt{1 - \mu_1^2} \sin \varphi_1); \end{aligned}$$

hier haben μ und μ_1 , ähnlich wie früher, die Bedeutungen:

$$(10.) \quad \mu = \cos \vartheta \quad \text{und} \quad \mu_1 = \cos \vartheta_1.$$

Der in (7.) angegebene Ausdruck

$$P_n(\cos \gamma) = A_n \cos^n \gamma + B_n \cos^{n-2} \gamma + \dots$$

verwandelt sich, falls man für $\cos \gamma$ den Werth (9.) substituirt, in eine Function von μ , φ , μ_1 , φ_1 . Und zwar erkennt man in solcher Weise, dass $P_n(\cos \gamma)$ bezeichnet werden kann als eine ganze rationale Function n^{ter} Dimension der drei Grössen:

$$(11.) \quad \mu, \quad \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \quad \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi,$$

und dass $P_n(\cos \gamma)$ andererseits auch bezeichnet werden kann als eine ganze rationale Function n^{ter} Dimension der drei Grössen:

$$(12.) \quad \mu_1, \quad \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos \varphi_1, \quad \sqrt{1 - \mu_1^2} \sin \varphi_1.$$

Gleichzeitig bemerkt man, dass $P_n(\cos \gamma)$, ebenso wie $\cos \gamma$ selber, symmetrisch ist in Bezug auf μ , φ und μ_1 , φ_1 .

Eine weitere Eigenschaft der Function $P_n(\cos \gamma)$ besteht darin, dass sie einer gewissen Differentialgleichung Genüge leistet. Denkt man sich nämlich im Punkte (x_1, y_1, z_1) eine Masse m_1 concentrirt, und das Potential dieser Masse auf den Punkt (x, y, z) mit V bezeichnet, so ist

$$(f.) \quad V = \frac{m_1}{E}.$$

Dieses V genügt aber der Laplace'schen Differentialgleichung (pg. 9):

$$\Delta V = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

d. i. der Gleichung (vgl. pg. 23):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Hieraus folgt, falls man für V den Werth (f.) substituirt:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \varphi^2} = 0,$$

oder, falls man $r_1 < r$ voraussetzt, und demgemäss für $\frac{1}{E}$ den Werth (5.) substituirt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r_1}{r}^n \left[n(n+1) P_n(\cos \gamma) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial P_n(\cos \gamma)}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 P_n(\cos \gamma)}{\partial \varphi^2} \right] = 0.$$

Die hier auf der linken Seite stehende, nach Potenzen von $\frac{r_1}{r}$ fortschreitende Reihe ist also stets $= 0$, falls nur $r_1 < r$, d. h. $\frac{r_1}{r} < 1$ gedacht wird. Und aus diesem Nullsein der Reihe folgt nach bekanntem Satz, dass in ihr die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\frac{r_1}{r}$ einzeln $= 0$ sind. Somit ergibt sich:

$$(13.) \quad n(n+1)P_n(\cos \gamma) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial P_n(\cos \gamma)}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 P_n(\cos \gamma)}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Die Function $P_n(\cos \gamma)$ ist aber, wie schon bemerkt wurde, in Bezug auf μ , φ und μ_1 , φ_1 *symmetrisch*. Und sie wird daher, weil sie in Rücksicht auf μ , φ der Differentialgleichung (13.) genügt, mit Bezug auf μ_1 , φ_1 folgender analogen Differentialgleichung Genüge leisten:

$$(14.) \quad n(n+1)P_n(\cos \gamma) + \frac{\partial}{\partial \mu_1} \left((1 - \mu_1^2) \frac{\partial P_n(\cos \gamma)}{\partial \mu_1} \right) + \frac{1}{1 - \mu_1^2} \frac{\partial^2 P_n(\cos \gamma)}{\partial \varphi_1^2} = 0.$$

Diese Differentialgleichungen (13.), (14.) repräsentiren zwei Eigenschaften des Ausdrucks $P_n(\cos \gamma)$, welche nicht minder wichtig sind, als die in (11.), (12.) angegebenen Eigenschaften.

§ 2.

Definition der allgemeinen Kugelfunctionen, d. i. der Laplace'schen Ypsilons.

Man pflegt den Ausdruck $P_n(\cos \gamma)$, auf Grund der so eben constatirten Eigenschaften, eine *Kugelfunction* zu nennen. Die betreffende Definition lautet nämlich folgendermassen:

Definition. — *Ein von den drei Grössen*

$$(15.) \quad \mu, \quad \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \quad \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi$$

abhängender Ausdruck F, welcher in Bezug auf diese drei Grössen eine ganze rationale Function höchstens n^{ter} Dimension ist, und welcher überdies der Differentialgleichung

$$(16.) \quad n(n+1)F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0$$

Genüge leistet, — wird bezeichnet als eine Kugelfunction, und zwar als eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung der Argumente μ , φ .

Auf Grund dieser Definition wird z. B. der Ausdruck

$$(17.) \quad P_n(\mu)$$

eine *Kugelfunction* n^{ter} Ordnung zu nennen sein. Nur tritt bei diesem Ausdrucke $P_n(\mu)$ der specielle Umstand ein, dass derselbe von den drei Grössen (15.) nur die *erste* enthält, und dass in Folge dessen die linke Seite der von ihm zu erfüllenden Differentialgleichung (16.) sich auf ihre beiden ersten Glieder reducirt. Dass dieser reducirten Gleichung durch $P_n(\mu)$ wirklich genügt wird, unterliegt keinem Zweifel. [Vgl. (4) pg. 34.]

Ebenso wird, auf Grund der gegebenen Definition, der Ausdruck

$$(18.) \quad P_n(\cos \gamma)$$

eine *Kugelfunction* n^{ter} Ordnung zu nennen sein, und zwar in doppeltem Sinne, nämlich einerseits mit Bezug auf μ , φ , und andererseits auch mit Bezug auf μ_1 , φ_1 : wie sich solches aus (11.), (12.), (13.), (14.) sofort ergibt.

Multiplicirt man ferner $P_n(\cos \gamma)$ mit einer beliebig gegebenen Function $f(\mu_1, \varphi_1)$, und integrirt man dieses Product nach μ_1 und φ_1 zwischen *festen Grenzen*, z. B. nach μ_1 zwischen -1 und $+1$, und nach φ_1 zwischen 0 und 2π , so wird der so entstehende Ausdruck:

$$(19.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) f(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1,$$

ebenso wie $P_n(\cos \gamma)$ selber, eine *ganze rationale Function höchstens* n^{ter} Dimension der drei Grössen (15.) sein, und zugleich auch eine Function sein, die, ebenso wie $P_n(\cos \gamma)$ selber, der Differentialgleichung (16.) Genüge leistet. Folglich wird dieser Ausdruck (19.) zu bezeichnen sein als eine *von* μ , φ *abhängende Kugelfunction* n^{ter} Ordnung.

Erste Bemerkung. — Eine *ganze rationale Function* irgend dreier Argumente u , v , w , die in Bezug auf u , v , w höchstens von der 0^{ten} Dimension ist, wird offenbar eine *Constante* (d. h. von u , v , w unabhängig) sein. Somit folgt aus (15.), dass eine Kugelfunction 0^{ter} Ordnung nothwendiger Weise eine *Constante* sein muss. Und umgekehrt ergibt sich, dass eine *willkürlich gegebene Constante* stets als eine *Kugelfunction* 0^{ter} Ordnung angesehen werden kann. Denn welchen Werth die Constante auch haben mag, stets wird sie den Bedingungen (15.), (16.) für $n = 0$ Genüge leisten.

Zweite Bemerkung. — Insbesondere ergibt sich, dass die *Constante Null* ganz nach Belieben als eine *Kugelfunction* 0^{ter} oder 1^{ter} oder 2^{ter} u. s. w. Ordnung angesehen werden kann. Denn die *Null* wird den Bedingungen (15.), (16.) unter allen Umständen Genüge leisten, welchen Werth man daselbst der Zahl n auch zuertheilen mag.

§ 3.

Der Laplace'sche Satz über das homogene Sphäroid.

Sind R, ϑ, φ oder R, μ, φ ($\mu = \cos \vartheta$) die Polarcordinaten eines variablen Punktes, so wird jede Gleichung von der Form

$$R = F(\mu, \varphi)$$

eine gewisse Fläche darstellen. Setzt man insbesondere:

$$(1.) \quad R = A [1 + \alpha f(\mu, \varphi)],$$

wo A eine positive Constante, ferner α eine unendlich kleine positive Constante, und $f(\mu, \varphi)$ eine willkürlich gegebene, jedoch stets endlich bleibende Function vorstellen soll, so wird durch diese Gleichung (1.) ein Fläche dargestellt sein, deren Radiusvector R von der gegebenen Constanten A stets nur unendlich wenig differirt, also eine Fläche, die von der um den Anfangspunkt mit dem Radius A beschriebenen Kugel- fläche nur unendlich wenig abweicht. Diese Fläche (1.) mag nun angesehen werden als die Oberfläche eines homogenen Körpers von der constanten Dichtigkeit q ; und dieser Körper mag kurzweg ein *homogenes Sphäroid* genannt werden.

Es sei O das Centrum des Sphäroids, d. h. der Anfangspunkt des zu Grunde gelegten Polarcordinatensystems. Ferner sei OQ irgend eine von O ausgehende feste Linie, und s der Punkt, in welchem die Sphäroid- oberfläche von dieser Linie OQ getroffen wird. Wir stellen uns die Aufgabe, das Potential des Sphäroids auf einen Punkt p zu untersuchen, der längs der festen Linie OQ verschiebbar ist.

Zu diesem Zweck construiren wir, ausser der um den Punkt O mit dem Radius A beschriebenen Kugel- fläche, noch eine zweite Kugel- fläche von dem- selben Radius, welche durch den Punkt s geht, und deren Centrum Ω auf der Linie OQ liegen soll. In der beistehen- den Figur ist diese um Ω beschriebene Kugel- fläche — sie mag die *Hülfskugel* heissen — nur *punktirt* an- gegeben; während die um O beschriebene Kugel- fläche — sie mag die *Hauptkugel* heissen — durch eine *continuirliche* Linie angedeutet ist.



Beide Kugeln haben denselben Radius A , und die eine kann also als eine unendlich kleine Verschiebung der andern angesehen werden.

Das gegebene Sphäroid weicht von der *Hauptkugel* nur unendlich wenig ab, und wird daher, weil die Hauptkugel durch eine unendlich kleine Verschiebung in die Hülfskugel übergeht, auch von dieser *Hülfskugel* nur unendlich wenig abweichen. Betrachtet man nun den längs der Linie OQ verschiebbaren Punkt p , so wird das Potential V des Sphäroids auf diesen Punkt p darstellbar sein durch:

$$(2.) \quad V = \frac{M}{q} + \sum \frac{dm_a}{E} - \sum \frac{dm_i}{E}.$$

Dabei soll $\frac{M}{q}$ das Potential der *Hülfskugel* sein, dieselbe erfüllt gedacht mit homogener Materie von der Dichtigkeit q . Es soll mithin

$$(2a.) \quad M = \frac{4\pi q}{3} A^3, \quad \text{und} \quad q = (\Omega p)$$

sein. Ueberdies sollen dm_a und dm_i diejenigen unendlich kleinen Massenelemente sein, welche zur Hülfskugel *zuzufügen*, resp. von derselben *fortzunehmen* sind, um dieselbe in das Sphäroid zu verwandeln. Endlich sollen die E 's die Abstände der Elemente dm_a und dm_i vom Punkte p vorstellen.

Benutzt man dm (ohne Index) als Collectivbezeichnung für $+dm_a$ und $-dm_i$, so kann man die Formel (2.) auch so schreiben:

$$(3.) \quad V = \frac{M}{q} + \sum \frac{dm}{E},$$

oder auch so:

$$(4.) \quad V = \frac{M}{q} + \sum \frac{dm}{\sqrt{A^2 + q^2 - 2Aq \cos \psi}},$$

wo ψ den Winkel bezeichnet, unter welchem die Linien $(\Omega, dm) = A$ und $(\Omega p) = q$ gegen einander geneigt sind. Aus (4.) folgt durch Differentiation nach q :

$$\frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{M}{q^2} - \sum \frac{(q - A \cos \psi) dm}{(A^2 + q^2 - 2Aq \cos \psi)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{wo } q = (\Omega p),$$

oder, was dasselbe ist*):

$$(5.) \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M}{q^2} - \sum \frac{(q - A \cos \psi) dm}{(A^2 + q^2 - 2Aq \cos \psi)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{wo } r = (Op).$$

*) In der That ist:

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Denn die beiden Variablen $q = (\Omega p)$ und $r = (Op)$ repräsentiren die Abstände des längs OQ verschiebbaren Punktes p von den beiden festen Punkten Ω und O . Und es unterscheiden sich also q und r von einander nur durch eine *constante* Differenz.

Verschiebt man jetzt den Punkt p längs der festen Linie OQ nach s , lässt man also q in A übergehen, so nehmen die beiden Formeln (4.), (5.) folgende Gestalt an:

$$(6.) \quad \begin{aligned} \bar{V} &= + \frac{M}{A} + \frac{1}{A} \sum \frac{dm}{\sqrt{2-2\cos\psi}}, \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} &= - \frac{M}{A^2} - \frac{1}{2A^2} \sum \frac{dm}{\sqrt{2-2\cos\psi}}, \end{aligned}$$

wo die horizontalen Ueberstreichungen andeuten sollen, dass diese Werthe der *Oberfläche* des Sphäroids, d. i. dem Punkte s entsprechen. Multiplicirt man schliesslich die Formeln (6.) mit 1 und $2A$, und addirt, so erhält man:

$$(7.) \quad \bar{V} + 2A \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} = - \frac{M}{A}, \quad \text{wo } M = \frac{4\pi q}{3} A^3 \quad [\text{vgl. (2a.)}].$$

Diese Formel (7.) repräsentirt den hier abzuleitenden *Laplace'schen Satz*. Derselbe ist gültig, welche Richtung man der festen Linie OQ auch zuertheilen mag, und, unter Fortlassung der angewendeten Hülfskugel, folgendermassen ausdrückbar:

Laplace'scher Satz über das Sphäroid. — *Es sei gegeben ein von der Fläche*

$$(8.) \quad R = A [1 + \alpha f(\mu, \varphi)]$$

begrenztes homogenes Sphäroid von der constanten Dichtigkeit q .

Bezeichnet man alsdann das Potential dieses Sphäroids auf irgend einen Punkt $p(r, \mu, \varphi)$ mit V , so gilt die Formel:

$$(9.) \quad \bar{V} + 2A \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} = - \frac{4\pi q A^2}{3},$$

wo unter \bar{V} und $\frac{\partial \bar{V}}{\partial r}$ diejenigen Werthe zu verstehen sind, welche V und $\frac{\partial V}{\partial r}$ annehmen, sobald man jenen Punkt $p(r, \mu, \varphi)$ nach irgend einer Oberflächenstelle des Sphäroids hinrücken lässt.

Man findet diesen Satz, oder vielmehr einen Satz von noch grösserer Allgemeinheit in der *Mécanique céleste*, Tome 2, Livre 3, Chap. 2, No. 10. Bei den dortigen Betrachtungen wird nämlich von Laplace angenommen, die gegenseitige Einwirkung zweier Massentheilen aufeinander sei proportional einer beliebigen Potenz der Entfernung.

§ 4.

Die von Laplace für eine willkürliche Function $f(\mu, \varphi)$ gegebene Entwicklung.

Zu wichtigen Resultaten werden wir jetzt dadurch gelangen, dass wir die im vorhergehenden Paragraph angestellten Betrachtungen von

Neuem, aber in etwas *anderer* Art durchführen, indem wir, statt der um Ω beschriebenen Hilfskugel, gegenwärtig die um O beschriebene *Hauptkugel* anwenden.

Das Potential des Sphäroids auf einen variablen äussern Punkt $p(r, \mu, \varphi)$ ist alsdann, ähnlich wie in (2.), (3.), durch die Formeln darstellbar:

$$(10.) \quad V = \frac{M}{r} + \sum \frac{dm_a}{E} - \sum \frac{dm_i}{E},$$

$$(11.) \quad V = \frac{M}{r} + \sum \frac{dm}{E}, \quad \text{wo } M = \frac{4\pi q}{3} A^3.$$

Dabei soll gegenwärtig $\frac{M}{r}$ das Potential der um den Anfangspunkt O beschriebenen *Hauptkugel* vorstellen. Demgemäss sollen dm_a und dm_i



diejenigen Massenelemente sein, welche zu dieser *Hauptkugel* zuzufügen respective von derselben fortzunehmen sind, um sie in das Sphäroid zu verwandeln. Ferner sollen die E 's die Entfernungen der Elemente dm_a und dm_i vom Punkte $p(r, \mu, \varphi)$ vorstellen; und endlich soll wieder dm (ohne Index) als Collectivbezeichnung für $(+ dm_a)$ und $(- dm_i)$ dienen.

Denkt man sich auf der um O mit dem Radius A beschriebenen Hauptkugelfläche an der Stelle (μ_1, φ_1) ein unendlich kleines Flächenelement $A^2 d\mu_1 d\varphi_1$ construiert, und von O aus einen Kugelmantel nach

der Peripherie dieses Elementes hingelegt, so wird innerhalb dieses Mantels ein Massenelement dm_a oder ein Massenelement dm_i anzutreffen sein. In beiden Fällen wird $A^2 d\mu_1 d\varphi_1$ als *Basis* dieses Massenelementes anzusehen sein, während seine *Höhe* [zufolge (8.)], ihrem absoluten Betrage nach, im erstern Fall $= + A\alpha f(\mu_1, \varphi_1)$, im letztern hingegen $= - A\alpha f(\mu_1, \varphi_1)$ ist. Man erhält daher im erstern Falle:

$$dm_a = q \cdot A^2 d\mu_1 d\varphi_1 \cdot A\alpha f(\mu_1, \varphi_1),$$

und im letztern Falle:

$$dm_i = q \cdot A^2 d\mu_1 d\varphi_1 \cdot [- A\alpha f(\mu_1, \varphi_1)];$$

so dass also das als Collectivbezeichnung für $(+ dm_a)$ und $(- dm_i)$ fungirende dm ganz allgemein den Werth hat:

$$dm = q \cdot A^2 d\mu_1 d\varphi_1 \cdot A\alpha f(\mu_1, \varphi_1).$$

Demgemäss ergibt sich aus (11.):

$$(12.) \quad V = \frac{M}{r} + q\alpha A^3 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{f(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1}{E}.$$

Dabei bezeichnet E den Abstand des Punktes $p(r, \mu, \varphi)$ vom Massenelement $dm(A, \mu_1, \varphi_1)$. Zufolge (5.) pg. 46 ist somit:

$$(12a.) \quad \frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma),$$

wo γ den Winkel zwischen $(Op) = r$ und $(O, dm) = A$ bezeichnet. Substituirt man diesen Werth von $\frac{1}{E}$ in (12.), so ergibt sich:

$$(13.) \quad V = \frac{M}{r} + \alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \mathfrak{U}_n,$$

und folglich:

$$(14.) \quad \frac{\partial V}{\partial r} = - \frac{M}{r^2} - \alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n+1}{r^{n+2}} \mathfrak{U}_n,$$

wo \mathfrak{U}_n die Bedeutung hat:

$$(15.) \quad \mathfrak{U}_n = q A^{n+3} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) f(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1.$$

Lässt man jetzt in (13.), (14.) den variablen Punkt $p(r, \mu, \varphi)$ auf die *Oberfläche* des Sphäroids, etwa nach s fallen, mithin r übergehen in

$$A[1 + \alpha f(\mu, \varphi)],$$

so erhält man, unter Vernachlässigung des *Quadrats* der unendlich kleinen Grösse α , folgende Formeln:

$$V = \frac{M[1 - \alpha f(\mu, \varphi)]}{A} + \alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{A^{n+1}} u_n,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = - \frac{M[1 - 2\alpha f(\mu, \varphi)]}{A^2} - \alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n+1}{A^{n+2}} u_n.$$

Multiplirt man diese Formeln respective mit 1 und $2A$, und addirt, so ergibt sich, mit Rücksicht auf den *Laplace'schen* Satz (9.):

$$- \frac{4\pi q A^2}{3} = - \frac{M}{A} + \frac{3\alpha M f(\mu, \varphi)}{A} - \alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{A^{n+1}} u_n,$$

oder, falls man für M seinen eigentlichen Werth $\frac{4\pi q A^3}{3}$ [vgl. (11.)] einsetzt:

$$(16.) \quad f(\mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi q A^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{A^{n+1}} u_n.$$

Diese Formel (16.) wollen wir nun vereinfachen, nämlich folgendermassen schreiben:

$$(17.) \quad f(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n(\mu, \varphi).$$

Das allgemeine Glied $Y_n(\mu, \varphi)$ dieser Reihe hat alsdann die Bedeutung:

$$Y_n(\mu, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi q A^{n+3}} u_n$$

und kann daher, falls man für u_n seinen Werth (15.) substituirt, auch so dargestellt werden:

$$(18.) \quad Y_n(\mu, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) f(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1.$$

Nun war $f(\mu, \varphi)$ eine stets endlich bleibende, sonst aber willkürlich gegebene Function [vgl. pg. 50]. Demgemäss gelangt man durch die Formeln (17.), (18.) zu folgendem Satze:

Die Laplace'sche Entwicklung. — *Versteht man unter $f(\mu, \varphi)$ eine auf der Kugelfläche [d. i. für $\mu = -1 \dots +1$ und $\varphi = 0 \dots 2\pi$] überall endlich bleibende, sonst aber willkürlich gegebene Function, so wird dieselbe entwickelbar sein in eine unendliche Reihe:*

$$(19.) \quad f(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n(\mu, \varphi),$$

deren einzelne Glieder die Werthe besitzen:

$$(20.) \quad Y_n(\mu, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) f(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1.$$

Dabei bezeichnet γ die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen (μ, φ) und (μ_1, φ_1) .

Der Ausdruck (20.) repräsentirt [vgl. (19.) pg. 49] eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung; so dass man also den soeben ausgesprochenen Satz auch so ausdrücken kann:

Versteht man unter $f(\mu, \varphi)$ eine auf der Kugelfläche überall endlich bleibende, sonst aber willkürlich gegebene Function, so wird $f(\mu, \varphi)$ für alle Punkte der Kugelfläche darstellbar sein durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe.

§ 5.

Die Integraleigenschaften der Kugelfunctionen.

Es sei $Y_n = Y_n(\mu, \varphi)$ irgend eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung, d. i. irgend eine der Definition pg. 48 entsprechende Function; desgleichen sei $Y_{n_1} = Y_{n_1}(\mu, \varphi)$ irgend eine Kugelfunction n_1^{ter} Ordnung. Und zur augenblicklichen Abkürzung mögen diese Functionen respective mit F und F_1 bezeichnet sein:

$$(21.) \quad \begin{aligned} F &= Y_n = Y_n(\mu, \varphi), \\ F_1 &= Y_{n_1} = Y_{n_1}(\mu, \varphi). \end{aligned}$$

Alsdann ist zufolge jener Definition pg. 48:

$$\begin{aligned} n(n+1)F - 2\mu \frac{\partial F}{\partial \mu} + (1-\mu^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} &= 0, \\ n_1(n_1+1)F_1 - 2\mu \frac{\partial F_1}{\partial \mu} + (1-\mu^2) \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mu^2} + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi^2} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplcirt man diese Gleichungen respective mit $+F_1$ und $-F$, und addirt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (n-n_1)(n+n_1+1)FF_1 - 2\mu \left(F_1 \frac{\partial F}{\partial \mu} - F \frac{\partial F_1}{\partial \mu} \right) \\ + (1-\mu^2) \left(F_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} - F \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mu^2} \right) + \frac{1}{1-\mu^2} \left(F_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - F \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\begin{aligned} (n-n_1)(n+n_1+1)FF_1 + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \left(F_1 \frac{\partial F}{\partial \mu} - F \frac{\partial F_1}{\partial \mu} \right) \right\} \\ + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(F_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi} - F \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplcirt man diese Gleichung mit $d\mu d\varphi$, und integrirt, so folgt:

$$\begin{aligned} (n-n_1)(n+n_1+1) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} FF_1 d\mu d\varphi \\ + \int_0^{2\pi} d\varphi \left[(1-\mu^2) \left(F_1 \frac{\partial F}{\partial \mu} - F \frac{\partial F_1}{\partial \mu} \right) \right]_{\mu=-1}^{\mu=+1} \\ + \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{1-\mu^2} \left[F_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi} - F \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} &= 0. \end{aligned}$$

Die hier durch die eckigen Klammern angedeuteten *Differenzen* sind aber $= 0$. Die Differenz in der *obern* Zeile verschwindet nämlich, weil $(1 - \mu^2)$ für $\mu = \pm 1$ zu Null wird*). Und die Differenz in der *untern* Zeile verschwindet ebenfalls, wie sich leicht ergibt, falls man nur beachtet, dass F und F_1 [vgl. (15.) pg. 48] ganze rationale Functionen von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ sind. — Somit folgt also:

$$(n - n_1)(n + n_1 + 1) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} F F_1 d\mu d\varphi = 0.$$

Ist nun $n \neq n_1$, so kann der Zahlenfactor $(n - n_1)(n + n_1 + 1)$ niemals verschwinden; so dass also in diesem Falle die Formel übergeht in

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} F F_1 d\mu d\varphi = 0.$$

Substituirt man schliesslich für F und F_1 ihre eigentlichen Bedeutungen (21.), so gelangt man zu folgendem Satze:

Erste Integraleigenschaft. — *Versteht man unter $Y_n(\mu, \varphi)$ und $Y_{n_1}(\mu, \varphi)$ irgend zwei Kugelfunctionen respective von der Ordnung n und n_1 , so wird stets die Formel gelten:*

$$(22.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_n(\mu, \varphi) Y_{n_1}(\mu, \varphi) d\mu d\varphi = 0,$$

falls nur $n \neq n_1$ ist.

Demgemäss wird z. B.

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_n(\mu, \varphi) Y_0(\mu, \varphi) d\mu d\varphi \quad \text{stets} = 0$$

sein, falls nur $n \neq 0$ ist. Die Function $Y_0(\mu, \varphi)$ repräsentirt aber eine Kugelfunction 0^{ter} Ordnung. Sie ist also [vgl. die erste Bemerkung pg. 49] eine *Constante*, und kann daher als solche vor das Integral gesetzt werden. Man gelangt somit zu dem Satze, dass das Integral

$$(22a.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_n(\mu, \varphi) d\mu d\varphi \quad \text{stets} = 0$$

sein wird, falls nur $n \neq 0$ ist.

Um weiter zu gehen, stellen wir uns folgende Aufgabe. Es sei $Z_3(\mu, \varphi)$ irgend eine *speciell gegebene* Kugelfunction 3^{ter} Ordnung, also eine Function, die den Bedingungen auf pg. 48 für $n = 3$ entspricht, also (wie hieraus folgt) eine Function, die auf der Kugelfläche überall *endlich* ist. Es soll diese specielle Function $Z_3(\mu, \varphi)$ nach Maassgabe des Theorems (19.), (20.) in eine Reihe entwickelt werden:

$$(23.) \quad Z_3(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n(\mu, \varphi).$$

*) Vgl. die Erläuterungen am Schlusse dieses Werkes.

Das allgemeine Glied $Y_n(\mu, \varphi)$ ist, wie aus jenem Theorem folgt, zu berechnen mittelst der Formel:

$$(24.) \quad Y_n(\mu, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) Z_3(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1.$$

Dieses Integral wird aber, weil $P_n(\cos \gamma)$ in Bezug auf μ_1, φ_1 eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung repräsentirt [vgl. pg. 49], stets $= 0$ sein, falls $n \neq 3$ ist; wie solches aus dem soeben bewiesenen Satze (22.) unmittelbar folgt. Demgemäss ergibt sich aus (24.), dass

$$Y_0(\mu, \varphi), \quad Y_1(\mu, \varphi), \quad Y_2(\mu, \varphi)$$

und ebenso

$$Y_4(\mu, \varphi), \quad Y_5(\mu, \varphi), \quad Y_6(\mu, \varphi), \quad \text{etc. etc. in inf.}$$

sämmtlich $= 0$ sind, und dass überdies $Y_3(\mu, \varphi)$ den Werth hat:

$$Y_3(\mu, \varphi) = \frac{2 \cdot 3 + 1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_3(\cos \gamma) Z_3(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1.$$

Substituirt man aber diese Werthe der Y 's in (23.), so erhält man:

$$(25.) \quad Z_3(\mu, \varphi) = \frac{2 \cdot 3 + 1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_3(\cos \gamma) Z_3(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1.$$

Da nun bei der ganzen Betrachtung über die speciell gegebene Kugelfunction 3^{ter} Ordnung $Z_3(\mu, \varphi)$ keinerlei besondere Voraussetzung gemacht ist, so wird die soeben gefundene Formel (25.) auch gültig sein für *jedwede andere* Kugelfunction 3^{ter} Ordnung $Y_3(\mu, \varphi)$; so dass man also erhält:

$$(26.) \quad Y_3(\mu, \varphi) = \frac{2 \cdot 3 + 1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_3(\cos \gamma) Y_3(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1.$$

Auch ist die Zahl 3 offenbar nur beispielsweise gewählt. Man gelangt daher zu folgendem Satz:

Zweite Integraleigenschaft. — Bezeichnet $Y_n(\mu, \varphi)$ irgend eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung, so wird stets die Formel stattfinden:

$$(27.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) Y_n(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1 = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\mu, \varphi),$$

wo γ die Neigung der Richtung (μ_1, φ_1) gegen irgend eine feste Richtung (μ, φ) vorstellt. Diese Formel kann man offenbar auch so schreiben:

$$(28.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) Y_n(\mu, \varphi) d\mu d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\mu_1, \varphi_1).$$

Denn die Function $P_n(\cos \gamma)$ ist [vgl. pg. 47] in Bezug auf die beiden Argumentenpaare μ, φ und μ_1, φ_1 *symmetrisch*. Und es entsteht daher die Formel (28.) aus (27.) unmittelbar dadurch, dass man die Buchstaben μ, φ und μ_1, φ_1 mit einander vertauscht.

Für den Specialfall $n=0$ wird die Formel (28.), weil $P_0(\cos \gamma) = 1$ ist [vgl. pg. 46], die Gestalt annehmen:

$$(28\text{ a.}) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_0(\mu, \varphi) d\mu d\varphi = 4\pi Y_0(\mu_1, \varphi_1).$$

Und die Richtigkeit dieser Formel ist *ca ipso* klar, falls man nur beachtet, dass $Y_0(\mu, \varphi)$ eine *Constante* ist [vgl. die erste Bemerkung pg. 49]. — An die beiden Integraleigenschaften (22.) und (27.) schliesst sich nun unmittelbar folgender Satz an:

Theorem. — *Eine gegebene Function*

$$(29.) \quad f(\mu, \varphi)$$

ist stets nur auf einerlei Art nach Kugelfunctionen entwickelbar.

Beweis. — Existirten nämlich *zwei* solche Entwicklungen:

$$(\beta.) \quad f(\mu, \varphi) = \sum_0^{\infty} Y_n(\mu, \varphi),$$

$$(\gamma.) \quad f(\mu, \varphi) = \sum_0^{\infty} Z_n(\mu, \varphi),$$

so würde aus $(\beta.)$ durch Multiplication mit $P_3(\cos \gamma) d\mu d\varphi$ und Integration sich ergeben:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) P_3(\cos \gamma) d\mu d\varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_3(\cos \gamma) Y_n(\mu, \varphi) d\mu d\varphi,$$

wo γ die Neigung der Richtung (μ, φ) gegen irgend eine feste Richtung (μ_1, φ_1) vorstellen soll. Die Integrale rechter Hand aber sind nach (22.) sämmtlich $= 0$, mit alleiniger Ausnahme desjenigen, in welchem $n = 3$ ist. Und dieses letztere ist, nach (28.),

$$= \frac{4\pi}{2 \cdot 3 + 1} Y_3(\mu_1, \varphi_1).$$

Somit folgt:

$$(\beta'.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) P_3(\cos \gamma) d\mu d\varphi = \frac{4\pi}{2 \cdot 3 + 1} Y_3(\mu_1, \varphi_1).$$

In analoger Weise ergibt sich offenbar aus $(\gamma.)$:

$$(\gamma'.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) P_3(\cos \gamma) d\mu d\varphi = \frac{4\pi}{2 \cdot 3 + 1} Z_3(\mu_1, \varphi_1).$$

Aus $(\beta'.)$ und $(\gamma'.)$ folgt aber sofort:

$$Y_3(\mu_1, \varphi_1) = Z_3(\mu_1, \varphi_1).$$

Und in analoger Weise wird man offenbar allgemein erhalten:

$$Y_n(\mu_1, \varphi_1) = Z_n(\mu_1, \varphi_1),$$

wo n eine beliebige Ordnungszahl, und μ_1, φ_1 beliebige Argumente vorstellen. Sind also zwei Entwicklungen (β .) und (γ .) für ein und dieselbe Function $f(\mu, \varphi)$ vorhanden, so werden diese Entwicklungen Glied für Glied unter einander identisch sein. — *Q. e. d.*

Zusätze. — In genau derselben Art, wie das Theorem (29.), kann man offenbar auch folgenden Satz beweisen:

Ist eine nach den Kugelfunctionen von μ, φ fortschreitende Reihe gegeben, und ist bekannt, dass diese Reihe auf der Kugelfläche [d. h. für $\mu = -1 \cdots +1$ und für $\varphi = 0 \cdots 2\pi$] durchweg $= 0$ ist, so folgt hieraus, dass die in dieser Reihe auftretenden Kugelfunctionen einzeln $= 0$ sind.

Ebenso ergibt sich auch folgender Satz, von welchem häufig Gebrauch zu machen ist:

Sind zwei nach den Kugelfunctionen von μ, φ fortschreitende Reihen gegeben, und ist bekannt, dass diese Reihen auf der Kugelfläche überall einander gleich sind, so folgt hieraus, dass in beiden Reihen die Kugelfunctionen gleicher Ordnung einzeln einander gleich sind.

§ 6.

Das Potential eines homogenen Sphäroids.

Wir haben im Vorhergehenden das *Potential des Sphäroids* nur als Mittel zum Zweck betrachtet. Nachdem aber jetzt dieser Zweck (nämlich die Theorie der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Entwicklungen) einigermaßen erreicht ist, dürfte es der Mühe werth sein, jenes Potential an und für sich näher ins Auge zu fassen.

Es sei wie früher die Sphäroidoberfläche dargestellt gedacht durch die Gleichung:

$$(1.) \quad R = A[1 + \alpha f(\mu, \varphi)],$$

und $f(\mu, \varphi)$ entwickelt nach Kugelfunctionen:

$$(2.) \quad f(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \varphi).$$

Denkt man sich nun *ausserhalb* oder auch *innerhalb* des Sphäroids irgend einen Punkt $p(r, \mu, \varphi)$ gegeben, so wird das Potential des Sphäroids auf diesen Punkt den Werth haben:

$$(3.) \quad V = V^{(k)} + q\alpha A^3 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{f(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1}{E};$$

wie sich solches leicht aus (12.) pg. 54 ergibt. Dabei bezeichnet alsdann $V^{(k)}$ das Potential der *Hauptkugel* auf den betrachteten Punkt $p(r, \mu, \varphi)$. Und es wird also $V^{(k)}$ einen der beiden Werthe haben:

$$(4.) \quad \begin{cases} V^{(k)} = \frac{4\pi q}{3} \frac{A^3}{r}, \\ \text{resp. } V^{(k)} = 2\pi q A^2 - \frac{2\pi q}{3} r^2, \end{cases}$$

nämlich den ersten oder zweiten, je nachdem der Punkt $p(r, \mu, \varphi)$ *ausserhalb* oder *innerhalb* der Hauptkugel liegt, d. i. je nachdem $r > A$ oder $r < A$ ist. [Vgl. (6a., i.) pg. 13.]

Was das *zweite* Glied der rechten Seite in (3.) betrifft, so ist nach pg. 46:

$$(5.) \quad \begin{cases} \frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma), \\ \text{resp. } \frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{A^{n+1}} P_n(\cos \gamma), \end{cases}$$

je nachdem der Punkt $p(r, \mu, \varphi)$ *ausserhalb* oder *innerhalb* der Hauptkugel liegt. Dabei bezeichnet γ die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen (μ, φ) und (μ_1, φ_1) .

Die Formel (3.) nimmt nun, falls man daselbst für $f(\mu_1, \varphi_1)$ die aus (2.) entspringende Entwicklung substituirt, die Gestalt an:

$$V = V^{(k)} + q\alpha A^3 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu_1, \varphi_1) \right) \frac{d\mu_1 d\varphi_1}{E}.$$

Substituirt man aber hier für $\frac{1}{E}$ den Werth (5.), und beachtet man die Integraleigenschaften der Kugelfunctionen (pg. 57 u. 58), so erhält man

$$(6.) \quad \begin{cases} V = V^{(k)} + q\alpha A^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{A^n}{r^{n+1}} Y_n(\mu, \varphi), \\ \text{resp. } V = V^{(k)} + q\alpha A^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{A^{n+1}} Y_n(\mu, \varphi), \end{cases}$$

je nachdem $r > A$ oder $r < A$ ist. — Man gelangt somit zu folgendem Resultate:

Ist der Radiusvector der Sphäroidoberfläche:

$$(7.) \quad R = A[1 + \alpha f(\mu, \varphi)]$$

nach Kugelfunctionen entwickelt:

$$(8.) \quad R = A \left[1 + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \varphi) \right],$$

so wird man, unter Anwendung dieser Y 's, das Potential des Sphäroids auf äussere und innere Punkte sofort anzugeben im Stande sein. Es wird nämlich alsdann dieses Potential durch eine der beiden Formeln (6.) dargestellt sein, wobei $V^{(k)}$ die in (4.) angegebene Bedeutung hat.

§ 7.

Anwendung der Theorie der Kugelfunctionen zur Berechnung des Potentials eines homogenen Körpers.

Das Potential eines homogenen Körpers in Bezug auf einen beliebigen Punkt p hat den Werth:

$$(1.) \quad V = \int \frac{dm_1}{E},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Massenelemente dm_1 des Körpers. Dabei bezeichnet E den Abstand des Elements dm_1 vom Punkte p .

Bezeichnet man die Polarcoordinaten des Punktes p und des Elementes dm_1 respective mit (r, μ, φ) und (r_1, μ_1, φ_1) , und setzt man demgemäss

$$(2.) \quad dm_1 = q r_1^2 dr_1 d\mu_1 d\varphi_1,$$

wo q die constante Dichtigkeit des Körpers vorstellt, so folgt aus (1.):

$$(3.) \quad V = q \iiint \frac{r_1^2 dr_1 d\mu_1 d\varphi_1}{E}.$$

Bei der weiteren Rechnung beschränken wir uns auf zwei möglichst einfache Fälle.

Erster Fall: Der Anfangspunkt O des Polarcoordinatensystems liegt innerhalb des Körpers. Um diesen Punkt O ist eine den Körper umschliessende Kugelfläche beschrieben; und der sollicitirte Punkt $p(r, \mu, \varphi)$ liegt ausserhalb dieser Kugelfläche.

Für jedwedes Körperelement

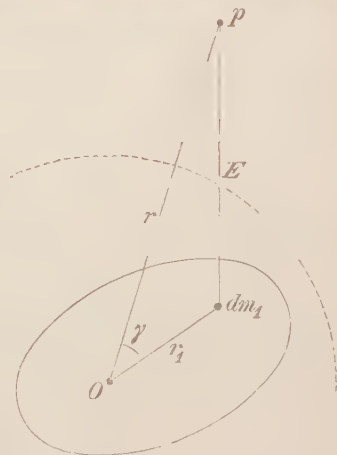
$$dm_1(r_1, \mu_1, \varphi_1)$$

ist alsdann $r_1 < r$, das in (3.) enthaltene $\frac{1}{E}$ also darstellbar durch:

$$\frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma),$$

[vgl. (5.) pg. 46],

wo γ den Winkel zwischen r und r_1 vorstellt. Somit folgt aus (3.):



$$(4.) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{r^{n+1}},$$

wo u_n die Bedeutung hat:

$$u_n = q \iiint P_n(\cos \gamma) r_1^{n+2} dr_1 d\mu_1 d\varphi_1.$$

Da $P_n(\cos \gamma)$ nur von $\cos \gamma$, also nur von $\mu, \varphi, \mu_1, \varphi_1$, nicht aber von r, r_1 abhängt, so ist die Integration nach r_1 sofort ausführbar. Man erhält:

$$(5.) \quad u_n = \frac{q}{n+3} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) R_1^{n+3} d\mu_1 d\varphi_1,$$

wo R_1 den der Richtung (μ_1, φ_1) entsprechenden Radiusvector der Körperoberfläche vorstellt.

R_1 wird, falls die Körperoberfläche in bestimmter Weise gegeben ist, eine bestimmte Function von μ_1, φ_1 sein. Und demgemäss wird nicht nur R_1 selber, sondern z. B. auch die j^{te} Potenz von R_1 , und ebenso auch $\log R_1$ nach Kugelfunctionen entwickelbar sein:

$$(6.) \quad R_1^j = \sum_{h=0}^{\infty} Y_h^{(j)}(\mu_1, \varphi_1),$$

$$(7.) \quad \log R_1 = \sum_{h=0}^{\infty} L_h(\mu_1, \varphi_1),$$

wo L_h , ebenso wie $Y_h^{(j)}$, eine Kugelfunction h^{ter} Ordnung vorstellen soll*).

Substituirt man nun die aus (6.) für $j = n + 3$ sich ergebende Reihe:

$$R_1^{n+3} = \sum_{h=0}^{\infty} Y_h^{(n+3)}(\mu_1, \varphi_1)$$

in (5.), und beachtet man die Integraleigenschaften der Kugelfunctionen (pg. 57 u. 58), so erhält man:

$$u_n = \frac{q}{n+3} \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^{(n+3)}(\mu, \varphi);$$

und demgemäss erhält man für das Potential V (4.) den Werth:

$$(8.) \quad V = 4\pi q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(2n+1)r^{n+1}} Y_n^{(n+3)}(\mu, \varphi).$$

*) Bei $Y_h^{(j)}$ dient das eingeklammerte (j) als oberer Index zur genaueren Unterscheidung. So z. B. werden die Potenzen R_1^2 und R_1^3 durch ganz verschiedene Entwicklungen dargestellt sein. Und die in diesen beiden Entwicklungen auftretenden Kugelfunctionen sind alsdann nach unserer Bezeichnungsweise durch $Y_h^{(2)}$, resp. durch $Y_h^{(3)}$ angedeutet.

Zweiter Fall: Der Coordinatenanfangspunkt O und der sollicitirte Punkt $p(r, \mu, \varphi)$ liegen beide *innerhalb* des Körpers, und besitzen eine derartige Lage, dass eine um O mit dem Radius Op beschriebene Kugelfläche σ ebenfalls vollständig *innerhalb* des Körpers liegt.

Alsdann zerfällt der Körper durch diese Fläche σ in eine *homogene Kugel*, und in einen ausserhalb σ liegenden *schaalenförmigen Theil*, der ebenfalls *homogen* ist. Das Potential des *ganzen* Körpers auf den Punkt p hat daher den Werth:

$$(9.) \quad V = \frac{4\pi q r^2}{3} + \iiint \frac{dm_1}{E},$$

die Integration ausgedehnt über alle Elemente dm_1 des *schaalenförmigen* Theiles.

Substituirt man hier für dm_1 und $\frac{1}{E}$ die Werthe:

$$dm_1 = q r_1^2 dr_1 d\mu_1 d\varphi_1, \quad [\text{vgl. (2.)}],$$

$$\frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos \gamma), \quad [\text{vgl. (5a). pg. 46}],$$

so erhält man:

$$(10.) \quad V = \frac{4\pi q r^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathfrak{B}_n,$$

wo \mathfrak{B}_n die Bedeutung hat:

$$(11.) \quad \mathfrak{B}_n = q \int_r^{R_1} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) r_1^{1-n} dr_1 d\mu_1 d\varphi_1.$$

Hier repräsentirt R_1 den der Richtung (μ_1, φ_1) entsprechenden Radius-vector der Körperoberfläche.

Aus (11.) ergibt sich z. B. für $n=0$, falls man nur beachtet, dass $P_0(\cos \gamma) = 1$ ist [vgl. (6.) pg. 46], die Formel:

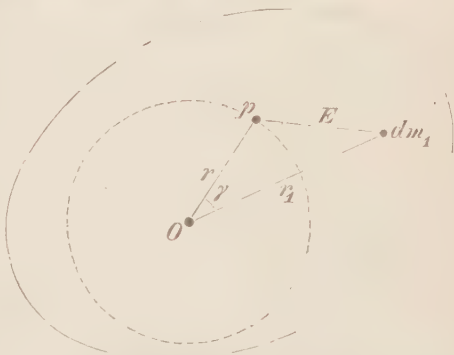
$$\mathfrak{B}_0 = q \int_r^{R_1} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} r_1 dr_1 d\mu_1 d\varphi_1,$$

d. i.

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{q}{2} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} R_1^2 d\mu_1 d\varphi_1 - 2\pi q r^2.$$

Substituirt man hier für R_1^2 die aus (6.) für $j=2$ entspringende Entwicklung:

$$R_1^2 = \sum_{h=0}^{\infty} Y_h^{(2)}(\mu_1, \varphi_1),$$



und beachtet man die in (22a.) pg. 57 angegebene Integraleigenschaft der Kugelfunctionen, so erhält man:

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{q}{2} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_0^{(2)}(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1 - 2\pi q r^2.$$

Eine Kugelfunction 0^{ter} Ordnung ist aber stets eine *Constante* [vgl. die erste Bemerkung pg. 49]. Demgemäss ist $Y_0^{(2)}(\mu_1, \varphi_1)$ eine *Constante*. Bezeichnet man diese *Constante* kurzweg mit $Y_0^{(2)}$, so ergibt sich:

$$(12.) \quad \mathfrak{B}_0 = 2\pi q Y_0^{(2)} - 2\pi q r^2.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich aus (11.) für $n = 1$ und $n = 2$, und unter Anwendung der Entwicklungen (6.) und (7.), die Formeln:

$$(13.) \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{4\pi q}{3} Y_1^{(1)}(\mu, \varphi);$$

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{4\pi q}{5} L_2(\mu, \varphi).$$

Endlich ergibt sich aus (11.), falls $n \geq 3$ ist, unter Anwendung von (6.), die Formel:

$$(14.) \quad \mathfrak{B}_n = - \frac{4\pi q}{(n-2)(2n+1)} Y_n^{(2-n)}(\mu, \varphi),$$

[für $n = 3, 4, 5$, etc.].

Substituirt man nun in (10.) für $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$, etc. die durch (12.), (13.), (14.) dargebotenen Werthe, so erhält man für das gesuchte Potential V folgende Formel:

$$(15.) \quad V = 4\pi q \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} Y_0^{(2)} + \frac{r}{3} Y_1^{(1)}(\mu, \varphi) + \left[\frac{r^2}{5} L_2(\mu, \varphi) - \frac{r^2}{6} \right] \\ &- \sum_{n=3}^{\infty} \frac{r^n}{(n-2)(2n+1)} Y_n^{(2-n)}(\mu, \varphi) \end{aligned} \right\}.$$

Ist der gegebene Körper eine *um O beschriebene Kugel*, mithin $R_1 = \text{Const.}$, so sind die Werthe der Kugelfunctionen $Y_n^{(j)}$ und L_n auf Grund der Formeln (6.), (7.), sofort angebar. Man erkennt nämlich aus jenen Formeln, dass in diesem Falle $Y_0^{(j)} = R_1^j$, ferner $L_0 = \log R_1$ wird, während alle übrigen $Y_n^{(j)}$ und L_n verschwinden. Für den Fall der Kugel reducirt sich daher die Formel (15.) auf

$$(16.) \quad V = 4\pi q \left(\frac{1}{2} R_1^2 - \frac{r^2}{6} \right),$$

was in Einklang steht mit unsern frühern Untersuchungen [vgl. (6i.) pg. 13].

Viertes Capitel.

Die analytischen Ausdrücke der allgemeinen Kugelfunctionen, und die Integraleigenschaften derselben.

Der reciproke Werth der gegenseitigen Entfernung E zweier Punkte (r, μ, φ) und (r_1, μ_1, φ_1) ist, falls $r_1 < r$ gedacht wird, durch die Reihe (5.) pg. 46 darstellbar:

$$(1.) \quad \frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma), \quad (r_1 < r),$$

wo γ die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen (μ, φ) und (μ_1, φ_1) repräsentirt, mithin der Formel entspricht:

$$(2.) \quad \cos \gamma = \mu \mu_1 + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos(\varphi - \varphi_1),$$

d. i. der Formel:

$$(3.) \quad \cos \gamma = \mu \mu_1 + \sigma \sigma_1 \cos \Phi.$$

Hier haben alsdann σ, σ_1 und Φ die Bedeutungen:

$$(4.) \quad \sigma = \sqrt{1 - \mu^2}, \quad \sigma_1 = \sqrt{1 - \mu_1^2}, \quad \Phi = \varphi - \varphi_1.$$

Um die Formel (1.), deren Wichtigkeit schon früher (pg. 27) angedeutet wurde, für die Anwendung bequemer zu machen, wird es nothwendig sein, das in derselben enthaltene $P_n(\cos \gamma)$ zu *entwickeln nach den Cosinus der Vielfachen von $\Phi = \varphi - \varphi_1$* . Diese Entwicklung soll im gegenwärtigen Capitel ausgeführt werden. Solches absolvirt, werden wir alsdann genauer einzugehen im Stande sein auf die *analytischen Ausdrücke der allgemeinen Kugelfunctionen*, sowie auf die schon berührten *Integraleigenschaften* derselben.

§ 1.

Entwicklung der Kugelfunctionen $P_n(\cos \gamma)$.

Wir haben bereits gefunden [vgl. z. B. (6.) pg. 46]:

$$(5.) \quad \begin{aligned} P_0(\cos \gamma) &= 1, \\ P_1(\cos \gamma) &= \cos \gamma, \\ P_2(\cos \gamma) &= \frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2}, \\ P_3(\cos \gamma) &= \frac{5}{2} \cos^3 \gamma - \frac{3}{2} \cos \gamma, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt, falls man für $\cos \gamma$ den Werth (3.) substituirt:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \gamma) &= 1, \\ P_1(\cos \gamma) &= \mu \mu_1 + \sigma \sigma_1 \cos \Phi, \\ (6.) \quad P_2(\cos \gamma) &= \frac{3}{2} (\mu \mu_1 + \sigma \sigma_1 \cos \Phi)^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(\cos \gamma) &= \frac{5}{2} (\mu \mu_1 + \sigma \sigma_1 \cos \Phi)^3 - \frac{3}{2} (\mu \mu_1 + \sigma \sigma_1 \cos \Phi), \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Führt man hier die Potenserhebungen des Binoms $(\mu \mu_1 + \sigma \sigma_1 \cos \Phi)$ wirklich aus, und verwandelt man dabei zugleich die Potenzen von $\cos \Phi$ in die Cosinus der Vielfachen von Φ , was zu bewerkstelligen ist mittelst der bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} \cos^2 \Phi &= \frac{1 + \cos 2\Phi}{2}, \\ \cos^3 \Phi &= \frac{3 \cos \Phi + \cos 3\Phi}{4}, \text{ etc.,} \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \gamma) &= (1), \\ P_1(\cos \gamma) &= (\mu \mu_1) + (1) \sigma \sigma_1 \cos \Phi, \\ P_2(\cos \gamma) &= \left(\frac{3}{2} (\mu \mu_1)^2 + \frac{3}{4} (\sigma \sigma_1)^2 - \frac{1}{2} \right) + (3 \mu \mu_1) \sigma \sigma_1 \cos \Phi \\ (7.) \quad &\quad + \left(\frac{3}{4} \right) (\sigma \sigma_1)^2 \cos 2\Phi, \\ P_3(\cos \gamma) &= \left(\frac{5}{2} (\mu \mu_1)^3 + \frac{15}{4} \mu \mu_1 (\sigma \sigma_1)^2 - \frac{3}{2} \mu \mu_1 \right) \\ &\quad + \left(\frac{15}{2} (\mu \mu_1)^2 + \frac{15}{8} (\sigma \sigma_1)^2 - \frac{3}{2} \right) \sigma \sigma_1 \cos \Phi \\ &\quad + \left(\frac{15}{4} \mu \mu_1 \right) (\sigma \sigma_1)^2 \cos 2\Phi + \left(\frac{5}{8} \right) (\sigma \sigma_1)^3 \cos 3\Phi. \end{aligned}$$

Diese Formeln, in denen die starken Klammern an mehreren Stellen nur der bessern Uebersichtlichkeit willen zugefügt sind, können, falls man die in diesen Klammern enthaltenen Grössen, unter Beifügung passender Indices, mit f , resp. $2f$ bezeichnet, folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \gamma) &= f_{00}, \\ P_1(\cos \gamma) &= f_{10} + 2f_{11} \sigma \sigma_1 \cos \Phi, \\ (8.) \quad P_2(\cos \gamma) &= f_{20} + 2f_{21} \sigma \sigma_1 \cos \Phi + 2f_{22} (\sigma \sigma_1)^2 \cos 2\Phi, \\ P_3(\cos \gamma) &= f_{30} + 2f_{31} \sigma \sigma_1 \cos \Phi + 2f_{32} (\sigma \sigma_1)^2 \cos 2\Phi \\ &\quad + 2f_{33} (\sigma \sigma_1)^3 \cos 3\Phi, \end{aligned}$$

5*

wo alsdann die f 's, ausser den μ, μ_1 , nur noch die *Quadrate* der σ, σ_1 enthalten. Diese Quadrate der σ, σ_1 haben aber nach (4.) die Werthe

$$\sigma^2 = 1 - \mu^2, \quad \sigma_1^2 = 1 - \mu_1^2.$$

Folglich sind die f 's *ganze rationale Functionen* von μ, μ_1 . Ueberdies erkennt man, dass jedes f in Bezug auf μ und μ_1 *symmetrisch* ist.

In analoger Weise wird sich nun, wie leicht zu übersehen ist, für das allgemeine $P_n(\cos \gamma)$ die Formel ergeben:

$$(9.) \quad P_n(\cos \gamma) = f_{n0} + 2f_{n1}\sigma\sigma_1 \cos \Phi + 2f_{n2}(\sigma\sigma_1)^2 \cos 2\Phi + \dots \\ \dots + 2f_{nj}(\sigma\sigma_1)^j \cos j\Phi + \dots + 2f_{nn}(\sigma\sigma_1)^n \cos n\Phi.$$

Dabei repräsentirt alsdann f_{nj} eine *ganze rationale Function* von μ, μ_1 , und zugleich eine Function, die in Bezug auf μ und μ_1 *symmetrisch* ist. Man kann übrigens die Formel (9.) einfacher so schreiben:

$$(10.) \quad P_n(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j f_{nj}(\sigma\sigma_1)^j \cos j\Phi,$$

oder mit Rücksicht auf (4.) auch so:

$$(11.) \quad P_n(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j f_{nj}(\sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu_1^2})^j \cos j(\varphi - \varphi_1),$$

wo alsdann die ε 's die Bedeutungen haben:

$$(12.) \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \dots = 2.$$

Die Functionen f_{nj} würden sich durch Vergleichung der Formeln (7.) und (8.) sofort bestimmen lassen. Bequemer zu diesem Zwecke ist aber die Anwendung der für $P_n(\cos \gamma)$ geltenden Differentialgleichung (13.) pg. 48.

Setzt man zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(13.) \quad F_{nj} = f_{nj}(\sqrt{1-\mu^2})^j,$$

mithin [nach (11.)]:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j F_{nj}(\sqrt{1-\mu_1^2})^j \cos j(\varphi - \varphi_1),$$

so ergibt sich, falls man diesen Ausdruck in jene Differentialgleichung substituirt, die Formel:

$$\sum_{j=0}^n \varepsilon_j \left[n(n+1)F_{nj} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial F_{nj}}{\partial \mu} \right) \right. \\ \left. - \frac{j^2 F_{nj}}{1-\mu^2} \right] (\sqrt{1-\mu_1^2})^j \cos j(\varphi - \varphi_1) = 0.$$

Da nun diese Gleichung, deren linke Seite nach den Cosinus der Vielfachen von $(\varphi - \varphi_1)$ fortschreitet, stattfinden soll für *beliebige* Werthe

von $(\varphi - \varphi_1)$, so müssen die Coefficienten jener Cosinus *einzel*n = 0 sein. Man erhält also:

$$(14.) \quad n(n+1)F_{nj} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F_{nj}}{\partial \mu} \right) - \frac{j^2 F_{nj}}{1 - \mu^2} = 0.$$

Substituirt man aber hier für F_{nj} seine eigentliche Bedeutung (13.), so ergibt sich nach leichter Rechnung:

$$(15.) \quad (n-j)(n+j+1)f_{nj} - (2j+2)\mu \frac{\partial f_{nj}}{\partial \mu} + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 f_{nj}}{\partial \mu^2} = 0.$$

f_{nj} ist also eine *ganze rationale* Function von μ , die überdies die Eigenschaft hat, der Differentialgleichung (15.) Genüge zu leisten. Hieraus folgt sofort [Satz pg. 37], dass f_{nj} von der Function

$$P_n^{(j)}(\mu) = \frac{d^j P_n(\mu)}{d\mu^j}$$

nur durch einen *constanten*, d. i. von μ *unabhängigen Factor* sich unterscheiden kann. Man erhält also:

$$f_{nj} = B P_n^{(j)}(\mu).$$

Dieser von μ unabhängige Factor B kann, weil f_{nj} eine Function von μ und μ_1 ist, nur noch von μ_1 abhängen, und mag demgemäss mit $B_{nj}(\mu_1)$ bezeichnet werden. Die so entstehende Formel

$$f_{nj} = B_{nj}(\mu_1) P_n^{(j)}(\mu)$$

kann sofort noch weiter vervollkommenet werden.

Wir wissen nämlich [vgl. die Betrachtungen von (8.) bis (10.)], dass f_{nj} *symmetrisch* ist in Bezug auf μ und μ_1 . Jene unbekannte Function $B_{nj}(\mu_1)$ muss daher nothwendig $= C_{nj} P_n^{(j)}(\mu_1)$ sein, wo C_{nj} eine *Constante* vorstellt; sodass man also erhält:

$$f_{nj} = C_{nj} P_n^{(j)}(\mu_1) P_n^{(j)}(\mu).$$

Dies in (11.) substituirt, erhält man schliesslich:

$$(16.) \quad P_n(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j C_{nj} P_n^{(j)}(\mu) P_n^{(j)}(\mu_1) (\sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_1^2})^j \cos j(\varphi - \varphi_1).$$

Demgemäss gelangt man also zu folgendem Resultate:

Entwicklung von $P_n(\cos \gamma)$. — *Versteht man unter γ die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen (μ, φ) und (μ_1, φ_1) , mithin unter $\cos \gamma$ den Ausdruck:*

$$(1.) \quad \cos \gamma = \mu \mu_1 + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos(\varphi - \varphi_1),$$

so ist die Function $P_n(\cos \gamma)$ folgendermassen entwickelbar:

$$(2.) \quad P_n(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j C_{nj} P_{nj}(\mu) P_{nj}(\mu_1) \cos j(\varphi - \varphi_1).$$

Hier haben $P_{nj}(\mu)$ und $P_{nj}(\mu_1)$ die Bedeutungen:

$$(3.) \quad P_{nj}(\mu) = (\sqrt{1-\mu^2})^j P_n^{(j)}(\mu) = (\sqrt{1-\mu^2})^j \frac{d^j P_n(\mu)}{d\mu^j},$$

$$P_{nj}(\mu_1) = (\sqrt{1-\mu_1^2})^j P_n^{(j)}(\mu_1) = (\sqrt{1-\mu_1^2})^j \frac{d^j P_n(\mu_1)}{d\mu_1^j};$$

und demgemäss ist z. B.:

$$(3a.) \quad P_{n0}(\mu) = P_n^{(0)}(\mu) = P_n(\mu).$$

Ferner sind unter den ε_j die Zahlen zu verstehen:

$$(4.) \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \dots = 2.$$

Gleichzeitig repräsentiren die C_{nj} gewisse Constanten. Diese Constanten haben (wie im nächsten § gezeigt werden soll) folgende Werthe:

$$(5.) \quad C_{nj} = \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)},$$

wo Π die Gauss'sche Function vorstellt. Demgemäss ist z. B.:

$$\begin{aligned} C_{00} &= 1, \\ C_{10} &= 1, \quad C_{11} = \frac{1}{1.2}, \\ (5a.) \quad C_{20} &= 1, \quad C_{21} = \frac{1}{2.3}, \quad C_{22} = \frac{1}{1.2.3.4}, \\ C_{30} &= 1, \quad C_{31} = \frac{1}{3.4}, \quad C_{32} = \frac{1}{2.3.4.5}, \quad C_{33} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6}, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Bemerkung. — Schreibt man die Function $P_n(\cos \gamma)$, nach Maassgabe der Formel (2.), der Reihe nach hin für $n = 0, 1, 2, 3$, etc., so gelangt man mit Rücksicht auf (3a.), und indem man für die Constanten ε und C die angegebenen Werthe substituirt, zu folgender Tabelle:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \gamma) &= 1, \\ P_1(\cos \gamma) &= P_1(\mu) P_1(\mu_1) + 2 \frac{P_{11}(\mu) P_{11}(\mu_1) \cos \Phi}{1.2}, \\ P_2(\cos \gamma) &= P_2(\mu) P_2(\mu_1) + 2 \frac{P_{21}(\mu) P_{21}(\mu_1) \cos \Phi}{2.3} + 2 \frac{P_{22}(\mu) P_{22}(\mu_1) \cos 2\Phi}{1.2.3.4}, \\ P_3(\cos \gamma) &= P_3(\mu) P_3(\mu_1) + 2 \frac{P_{31}(\mu) P_{31}(\mu_1) \cos \Phi}{3.4} + 2 \frac{P_{32}(\mu) P_{32}(\mu_1) \cos 2\Phi}{2.3.4.5} \\ &\quad + 2 \frac{P_{33}(\mu) P_{33}(\mu_1) \cos 3\Phi}{1.2.3.4.5.6}, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

wo Φ zur Abkürzung steht für $(\varphi - \varphi_1)$.

§ 2.

Nachträglicher Beweis*) der Formel (5.) pg. 70.

Zur Führung dieses Beweises werden wir die gegenseitige Entfernung E zweier Punkte betrachten, *die beide auf der x -Axe liegen*, für welche also $\vartheta = \vartheta_1 = 0$, mithin $\mu = \mu_1 = 1$ ist.

Wir beginnen damit, dass wir μ und μ_1 *einander gleich* (aber ab-sichtlich noch nicht $= 1$) setzen. Ueberdies setzen wir der Bequem-lichkeit willen $r_1 = 1$ und $\varphi_1 = 0$, und $r < 1$; so dass wir also folgendes Schema haben:

$$(A.) \quad \begin{cases} r < 1, \\ \mu, \\ \varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 = 1, \\ \mu_1 = \mu, \\ \varphi_1 = 0. \end{cases}$$

Alsdann ergibt sich für die gegenseitige Entfernung E der beiden Punkte die Formel [vgl. (5a.) pg. 46]:

$$(B.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \gamma + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos \gamma);$$

und gleichzeitig ergibt sich aus (1.), (2.) p. 69:

$$\cos \gamma = \mu^2 + (1 - \mu^2) \cos \varphi,$$

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j C_{nj} [P_{nj}(\mu)]^2 \cos j\varphi.$$

Substituirt man diese Werthe in (B.), so folgt:

$$(C.) \quad \frac{1}{\sqrt{(1+r^2-2r\mu^2)-2r(1-\mu^2)\cos\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left\{ r^n C_{nj} [P_{nj}(\mu)]^2 \varepsilon_j \cos j\varphi \right\},$$

($r < 1$).

Diese Formel (C.), welche stets gültig sein wird, falls nur die Be-dingung $r < 1$ erfüllt ist, soll nun benutzt werden zur Bestimmung der Constanten C_{nj} , und zwar in der Weise, dass man in ihr die Variable $\mu = 1$ macht.

Die Formel (C.) hat die Gestalt:

$$F(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n A_{nj} \varepsilon_j \cos j\varphi,$$

*) Dieser Beweis wird hier bewerkstelligt werden nicht nach der in den H. Neumann'schen Vorlesungen benutzten Laplace'schen Methode, sondern viel-mehr nach einer etwas *einfacheren* Methode, die der Herausgeber für seine eigenen Vorlesungen sich zurecht gelegt hat.

d. i. die Gestalt [vgl. (4.) pg. 70]:

$$\begin{aligned}
 F(\varphi) = & A_{00} \\
 & + A_{10} + 2A_{11} \cos \varphi \\
 & + A_{20} + 2A_{21} \cos \varphi + 2A_{22} \cos 2\varphi \\
 & + A_{30} + 2A_{31} \cos \varphi + 2A_{32} \cos 2\varphi + 2A_{33} \cos 3\varphi \\
 & + \text{etc. etc. etc.}
 \end{aligned}$$

Multipliziert man aber diese letzte Formel mit $\cos j\varphi d\varphi$, wo j eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... vorstellen soll, und integrirt über das Intervall $\varphi = 0 \dots 2\pi$, so erhält man:

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos j\varphi d\varphi = 2\pi (A_{jj} + A_{j+1,j} + A_{j+2,j} + \dots),$$

oder einfacher geschrieben:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos j\varphi d\varphi = \sum_{n=j}^{n=\infty} A_{nj}, \quad (\text{wo } j = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Dieser Bemerkung entsprechend, ergibt sich aus (C.):

$$\begin{aligned}
 \text{(D.)} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\varphi d\varphi}{V(1+r^2-2r\mu^2) - 2r(1-\mu^2)\cos\varphi} &= \sum_{n=j}^{n=\infty} \left\{ r^n C_n [P_n(\mu)]^2 \right\}. \\
 &(\text{wo } j = 0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Formel*) zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
 \text{(E.)} \quad U &= 1 + r^2 - 2r\mu^2, \\
 V &= 2r(1 - \mu^2),
 \end{aligned}$$

und dividirt man überdies die Formel durch die j^{te} Potenz von V , so erhält man [vgl. (3.) pg. 70]:

$$\text{(F.)} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\varphi d\varphi}{V^j \sqrt{U - V \cos \varphi}} = \sum_{n=j}^{n=\infty} \left\{ C_{nj} \left(\frac{1}{2}\right)^j r^{n-j} [P_n(\mu)]^2 \right\}.$$

Wir wollen nun in dieser Formel die Variable μ allmählich zu 1 werden lassen, indem wir zuvörderst annehmen, es sei

$$\text{(G.)} \quad \begin{cases} \mu \text{ nahezu} = 1, \\ \text{mithin } U \text{ nahezu} = (1-r)^2, \\ \text{und } V \text{ nahezu} = 0. \end{cases}$$

Die linke Seite der Formel (F.) ist alsdann (weil V nahezu = 0 ist)

*) Man kann in (D.) die Variable μ z. B. = 1 setzen, und findet alsdann, dass die Constanten C_{n0} sämmtlich = 1 sind; ohne dabei aber Aufschluss zu erhalten über die Constanten C_{nj} ($j > 0$).

entwickelbar nach steigenden Potenzen von V , also in die Gestalt versetzbar:

$$(H.) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[k_0 + k_1 \left(\frac{V \cos \varphi}{U} \right) + k_2 \left(\frac{V \cos \varphi}{U} \right)^2 + \dots \right] \frac{\cos j \varphi d\varphi}{V^j \sqrt{U}},$$

wo k_0, k_1, k_2, \dots die schon früher (pg. 28) angewendeten Zahlen vorstellen:

$$(J.) \quad k_0 = 1, \quad k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{1.3}{2.4}, \quad k_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6}, \quad \text{etc. etc.}$$

$$k_j = \frac{\Pi(2j)}{2^{2j} \Pi^2(j)}.$$

Nun ist, wie sich leicht ergibt:

$$(K.) \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos j \varphi d\varphi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos j \varphi \cos \varphi d\varphi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos j \varphi (\cos \varphi)^2 d\varphi &= 0, \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ &\dots \dots \dots \\ \int_0^{2\pi} \cos j \varphi (\cos \varphi)^{j-1} d\varphi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos j \varphi (\cos \varphi)^j d\varphi &= \frac{2\pi}{2^j}; \end{aligned}$$

wodurch das Integral (H.) sich reducirt auf:

$$(L.) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[k_j \left(\frac{V \cos \varphi}{U} \right)^j + k_{j+1} \left(\frac{V \cos \varphi}{U} \right)^{j+1} + \dots \right] \frac{\cos j \varphi d\varphi}{V^j \sqrt{U}};$$

so dass also die Formel (F.) folgende Gestalt erhält:

$$(M.) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[k_j \left(\frac{\cos \varphi}{U} \right)^j + k_{j+1} V \left(\frac{\cos \varphi}{U} \right)^{j+1} + \dots \right] \frac{\cos j \varphi d\varphi}{\sqrt{U}} \\ = \sum_{n=j}^{n=\infty} \left\{ \frac{C_{nj} r^{n-j}}{2^j} [P_n^{(j)}(\mu)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Bringt man jetzt endlich die in (G.) begonnene Operation zum Abschluss, indem man μ, U, V geradezu die dort angegebenen Werthe 1, $(1-r)^2$, 0 annehmen lässt, so reducirt sich die Formel (M.) auf:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_j \left(\frac{\cos \varphi}{(1-r)^2} \right)^j \frac{\cos j \varphi d\varphi}{1-r} = \sum_{n=j}^{n=\infty} \left\{ \frac{C_{nj} r^{n-j}}{2^j} [P_n^{(j)}(1)]^2 \right\}.$$

Die Integration linker Hand ist sofort ausführbar mittelst der *letzten* der Formeln (K.). Beachtet man überdies, dass zufolge (J.) und nach p. 37]

$$k_j = \frac{\Pi(2j)}{2^{2j}\Pi^2(j)} \quad \text{und} \quad [P_n^{(j)}(1)]^2 = \frac{1}{2^{2j}\Pi^2(j)} \frac{\Pi^2(n+j)}{\Pi^2(n-j)}$$

ist, so erhält man:

$$(N.) \quad \frac{\Pi(2j)}{(1-r)^{2j+1}} = \sum_{n=j}^{n=\infty} \left\{ C_n \frac{\Pi^2(n+j)}{\Pi^2(n-j)} r^{n-j} \right\}.$$

Andererseits aber erhält man direct auf Grund des Binomischen Satzes:

$$(O.) \quad \frac{\Pi(2j)}{(1-r)^{2j+1}} = \frac{\Pi(2j)}{\Pi(0)} + \frac{\Pi(2j+1)}{\Pi(1)} r + \frac{\Pi(2j+2)}{\Pi(2)} r^2 + \dots \\ \dots + \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)} r^{n-j} + \dots$$

Die Vergleichung dieser beiden Formeln (N.) und (O.) liefert aber sofort:

$$(P.) \quad C_{nj} = \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} \cdot - Q. e. d.$$

§ 3.

Die analytischen Ausdrücke der allgemeinen Kugelfunctionen.

Nach unserer Definition (pg. 48) ist unter einer *Kugelfunction* n^{ter} *Ordnung* von μ , φ ein aus den drei Grössen

$$\mu, \quad \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi, \quad \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi$$

zusammengesetzter Ausdruck zu verstehen, welcher in Bezug auf diese drei Grössen eine *ganze rationale Function* n^{ter} *Dimension* vorstellt, und welcher überdies der Differentialgleichung

$$n(n+1)F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0$$

Genüge leistet.

Hieraus folgt z. B., wie schon damals [(18.) pg. 49] bemerkt wurde, dass die von γ , d. i. von μ , φ , μ_1 , φ_1 abhängende Function $P_n(\cos \gamma)$ in *doppelter* Weise eine *Kugelfunction* n^{ter} *Ordnung* zu nennen ist, nämlich sowohl in Bezug auf μ , φ , wie auch in Bezug auf μ_1 , φ_1 . Und hieraus folgt weiter, dass z. B. der Werth des Integrals

$$\int_A^B P_n(\cos \gamma) f(\varphi_1) d\varphi_1$$

in Bezug auf μ , φ wiederum eine *Kugelfunction* n^{ter} Ordnung vorstellt. Dabei kann die Function $f(\varphi_1)$ eine ganz beliebige sein; und ebenso können auch die Constanten A , B willkürlich gewählt sein. Demgemäss wird also z. B. der Werth des Integrals

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) \cos 5\varphi_1 d\varphi_1$$

eine *Kugelfunction* n^{ter} Ordnung sein in Bezug auf μ , φ . Der Werth dieses letztern Integrales ist aber, wie sich aus (2.) p. 69 leicht ergibt, gleich

$$\pi \varepsilon_5 C_{n5} P_{n5}(\mu) P_{n5}(\mu_1) \cos 5\varphi,$$

also durch Absonderung der *constanten* (d. i. von μ , φ unabhängigen) Factoren reducirbar auf:

$$P_{n5}(\mu) \cos 5\varphi.$$

Mithin ist dieser letztere Ausdruck eine *Kugelfunction* n^{ter} Ordnung.

In analoger Weise ergibt sich, dass sämtliche Ausdrücke

$$P_{nj}(\mu) \cos j\varphi, \quad P_{nj}(\mu) \sin j\varphi \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung sind. Gleiches gilt daher auch von jedwedem Aggregat dieser Ausdrücke; sodass man also zu folgendem Satz gelangt:

Erster Satz. — *Versteht man unter $P_{nj}(\mu)$ die in (3.) pg. 70 definierte Function, so werden die Ausdrücke:*

$$(\mathfrak{A}) \quad P_{nj}(\mu) \cos j\varphi, \quad P_{nj}(\mu) \sin j\varphi, \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

d. i. die Ausdrücke:

$$(\mathfrak{A}'). \quad \begin{array}{lll} P_n(\mu); & P_{n1}(\mu) \cos \varphi, & P_{n1}(\mu) \sin \varphi; \\ & P_{n2}(\mu) \cos 2\varphi, & P_{n2}(\mu) \sin 2\varphi; \\ & \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{array}$$

lauter Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung sein. Und Gleiches gilt daher auch von dem Aggregat:

$$(\mathfrak{B}) \quad \sum_{j=0}^n [A^{(j)} P_{nj}(\mu) \cos j\varphi + B^{(j)} P_{nj}(\mu) \sin j\varphi],$$

falls man nämlich unter den A , B irgend welche Constanten versteht.

Uebrigens ist dieses Aggregat auch so darstellbar:

$$(\mathfrak{B}'). \quad A^{(0)} P_n(\mu) + \sum_{j=1}^n [A^{(j)} P_{nj}(\mu) \cos j\varphi + B^{(j)} P_{nj}(\mu) \sin j\varphi],$$

und im Ganzen also mit $(2n + 1)$ willkürlichen Constanten behaftet*).

Es fragt sich, ob auch der umgekehrte Satz gilt, also ob *jedwede* Kugelfunction n^{ter} Ordnung die hier in (B.), (B') angegebene Gestalt besitzen wird.

Es sei $Y_n(\mu, \varphi)$ eine ganz beliebig gegebene Kugelfunction n^{ter} Ordnung, also eine Function, von welcher *nur* bekannt ist, dass sie den zu Anfang dieses Paragraphs angegebenen Bedingungen Genüge leistet. Alsdann gilt nach (27.) pg. 58 die Formel:

$$Y_n(\mu, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) Y_n(\mu_1, \varphi_1) d\mu_1 d\varphi_1.$$

Substituirt man aber hier für $P_n(\cos \gamma)$ seinen Werth (2.) pg. 69, und denkt man sich sodann die Integrationen nach μ_1 und φ_1 wirklich ausgeführt, so erhält man für $Y_n(\mu, \varphi)$ einen Ausdruck von der in (B.), (B') angegebenen Beschaffenheit. Somit ergiebt sich folgender

Zweiter Satz. — *Jedwede Kugelfunction n^{ter} Ordnung von μ, φ hat die in (B.), (B') angegebene Gestalt:*

$$(\mathfrak{C}.) \quad \sum_{j=0}^n [A^{(j)} P_{nj}(\mu) \cos j\varphi + B^{(j)} P_{nj}(\mu) \sin j\varphi],$$

d. i. die Gestalt:

$$(\mathfrak{C}'). \quad A^{(0)} + \sum_{j=1}^n [A^{(j)} P_{nj}(\mu) \cos j\varphi + B^{(j)} P_{nj}(\mu) \sin j\varphi],$$

wo die A, B Constanten vorstellen.

Versteht man also unter Y_0, Y_1, Y_2 , etc. irgend welche Kugelfunctionen respective von der $0^{\text{ten}}, 1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}$, u. s. w. Ordnung, so werden Y_0, Y_1, Y_2 , etc. nothwendiger Weise folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned} Y_0 &= A_0^0 P_0(\mu), \\ (\mathfrak{D}.) \quad Y_1 &= A_1^0 P_1(\mu) + (A_1^1 \cos \varphi + B_1^1 \sin \varphi) P_{11}(\mu), \\ Y_2 &= A_2^0 P_2(\mu) + (A_2^1 \cos \varphi + B_2^1 \sin \varphi) P_{21}(\mu) + \\ &\quad + (A_2^2 \cos 2\varphi + B_2^2 \sin 2\varphi) P_{22}(\mu), \\ &\quad \text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Hier sind unter den A_n^j und B_n^j willkürliche Constanten zu verstehen.

*) Man könnte in (B.), (B'), statt der oberen Summationsgrenze n , auch ∞ setzen. Die dadurch hinzukommenden Glieder würden durchweg $= 0$ sein. Denn $P_n(\mu)$ ist eine ganze rationale Function n^{ten} Grades. Folglich ist

$$\frac{d^j P_n(\mu)}{d\mu^j} = 0, \quad \text{für } j > n.$$

Und Gleiches gilt daher auch von $P_{nj}(\mu)$. Vgl. (3.) pg. 70.

Bemerkung. — Bekanntlich ist $P_0(\mu) = 1$ [vgl. (10.) pg. 29]; so dass also die *erste* der Formeln (D.) die Gestalt besitzt:

$$Y_0 = A_0^0 = \text{Const.}$$

Mithin ist jede Kugelfunction 0^{ter} Ordnung eine *Constante*. Diesen Satz haben wir schon früher constatirt [vgl. die erste Bemerkung p. 49].

Zweite Bemerkung. — Beachtet man, dass die $P_n(\mu)$ den Factor $\sqrt{1-\mu^2}$ enthalten [vgl. (3.) pg. 70], und dass dieser Factor für $\mu = \pm 1$ verschwindet, so ergibt sich aus den Formeln (D.) sofort, dass

$$Y_0, \quad Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, \quad \text{etc.}$$

für $\mu = \pm 1$ *constante* Werthe haben, d. h. Werthe, die nicht nur von μ , sondern auch von φ unabhängig sind.

Dritte Bemerkung. — Die Function $P_n(\cos \gamma)$ ist [vgl. pg. 49] eine *Kugelfunction n^{ter} Ordnung* sowohl für μ , φ , als auch für μ_1 , φ_1 . Zufolge unseres letzten Satzes muss sie daher z. B. mit Bezug auf μ , φ die in (C.), (C') angegebene Gestalt haben. Dass solches aber in der That der Fall ist, zeigt ein Blick auf die in (2.) pg. 69 für $P_n(\cos \gamma)$ gegebene Darstellung.

§ 4.

Die Integraleigenschaften der Kugelfunctionen.

Wir wollen zuvörderst die Integraleigenschaften der *allgemeinen* Kugelfunctionen $Y_n(\mu, \varphi)$ kurz recapituliren, und sodann zur Betrachtung *speciellerer* Fälle übergehen. Die bereits gefundenen Sätze [vgl. pg. 57, 58] lauten folgendermassen:

Erstens. — Sind $Y_n(\mu, \varphi)$ und $Y_{n_1}(\mu, \varphi)$ irgend zwei Kugelfunctionen resp. von den Ordnungen n und n_1 , so ist:

$$(I.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_n(\mu, \varphi) Y_{n_1}(\mu, \varphi) d\mu d\varphi = 0, \quad \text{falls } n \neq n_1.$$

Demgemäss ist z. B.:

$$(Ia.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_n(\mu, \varphi) d\mu d\varphi = 0, \quad \text{falls } n \neq 0.$$

Zweitens. — Ist $Y_n(\mu, \varphi)$ irgend eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung, so findet die Formel statt:

$$(II.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) Y_n(\mu, \varphi) d\mu d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\mu_1, \varphi_1);$$

dabei bezeichnet γ die Neigung der variablen Richtung (μ, φ) gegen irgend eine feste Richtung (μ_1, φ_1) .

Specielle Fälle der Functionen $Y_n(\mu, \varphi)$, $Y_{n_1}(\mu, \varphi)$ sind z. B. $P_n(\mu)$, $P_{n_1}(\mu)$; [vgl. (A.), (A') pg. 75]. Bringt man aber die Formeln (I.), (Ia.), (II.) auf diese speciellen Fälle in Anwendung, so erhält man:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\mu) P_{n_1}(\mu) d\mu d\varphi = 0, \quad \text{falls } n \neq n_1,$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\mu) d\mu d\varphi = 0, \quad \text{falls } n \neq 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) P_n(\mu) d\mu d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\mu_1).$$

In diesen Formeln sind, falls man in der letzten für $P_n(\cos \gamma)$ die Entwicklung (2.) pg. 69 substituirt, die Integrationen nach φ sofort ausführbar. Man erhält in solcher Weise:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_{n_1}(\mu) d\mu = 0, \quad \text{falls } n \neq n_1,$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) d\mu = 0, \quad \text{falls } n \neq 0,$$

$$2\pi \varepsilon_0 C_{n0} P_{n0}(\mu_1) \int_{-1}^{+1} P_{n0}(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\mu_1).$$

Beachtet man nun, dass [vgl. pg. 70]

$$\varepsilon_0 = 1, \quad C_{n0} = 1 \quad \text{und} \quad P_{n0} = P_n$$

ist, so gelangt man schliesslich zu folgenden Formeln.

Formeln für die Functionen P_n .

$$(I.) \quad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_{n_1}(\mu) d\mu = 0, \quad \text{falls } n \neq n_1;$$

$$(Ia.) \quad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) d\mu = 0, \quad \text{falls } n \neq 0;$$

$$(II.) \quad \int_{-1}^{+1} [P_n(\mu)]^2 d\mu = \frac{2}{2n+1}.$$

Dies kann übrigens die Formel (Ia.) angesehen werden als der aus der Formel (I.) für $n_1 = 0$ resultirende Specialfall.

Man kann nun ferner in den zu Anfang dieses Paragraphs angegebenen Formeln die Kugelfunctionen $Y_n(\mu, \varphi)$, $Y_{n_1}(\mu, \varphi)$ auch ersetzen durch die in (II.), (III.) pg. 75 aufgeführten specielleren Kugelfunctionen $P_n(\mu) \cos j\varphi$ und $P_{n_1}(\mu) \cos j\varphi$. Alsdann gelangt man, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll, zu folgenden Formeln.

Formeln für die Functionen P_{nj} .

$$(I.) \quad \int_{-1}^{+1} P_{nj}(\mu) P_{n_1j}(\mu) d\mu = 0, \quad \text{falls } n \neq n_1;$$

$$(Ia.) \quad \int_{-1}^{+1} P_{nj}(\mu) d\mu = 0, \quad \text{falls } n \neq 0;$$

$$(II.) \quad \int_{-1}^{+1} [P_{nj}(\mu)]^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)}.$$

Von diesen Formeln sind die beiden ersten gültig für jedwede Zahl $j = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, wie gross dieselbe auch gedacht werden mag*). Hingegen ist die dritte nur dann anwendbar, wenn $j \leq n$ ist.

Bemerkung. — Die Formel (II.) pg. 77 lautet, falls man μ_0, φ_0 für μ, φ schreibt, folgendermassen:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma_{01}) Y_n(\mu_0, \varphi_0) d\mu_0 d\varphi_0 = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\mu_1, \varphi_1),$$

wo alsdann γ_{01} die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen (μ_0, φ_0) und (μ_1, φ_1) vorstellt. Da nun $Y_n(\mu_0, \varphi_0)$ jede beliebige Kugelfunction n^{ter} Ordnung sein darf, so kann man für dieselbe z. B. auch $P_n(\cos \gamma_{02})$ nehmen, indem man dabei unter γ_{02} die Neigung von (μ_0, φ_0) gegen irgend eine feste Richtung (μ_2, φ_2) versteht; und gelangt alsdann zu folgender Formel:

$$(F.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma_{01}) P_n(\cos \gamma_{02}) d\mu_0 d\varphi_0 = \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\cos \gamma_{12}).$$

Hier repräsentirt alsdann γ_{12} die gegenseitige Neigung zwischen irgend zwei festen Richtungen (μ_1, φ_1) und (μ_2, φ_2) ; während γ_{01} und γ_{02} diejenigen Winkel vorstellen, unter denen die variable Richtung (μ_0, φ_0) gegen jene beiden festen Richtungen geneigt ist.

§ 5.

Beiläufige Betrachtungen.**)

Die Functionen $P_0 = P_0(\mu)$, $P_1 = P_1(\mu)$, $P_2 = P_2(\mu)$, etc. haben bekanntlich [vgl. (10.), (11.) pg. 29] Werthe von der Form:

$$(1.) \quad \begin{cases} P_0 = \mu^0, \\ P_2 = A\mu^2 + B\mu^0, \\ P_4 = C\mu^4 + D\mu^2 + E\mu^0, \\ \text{etc. etc.}, \end{cases} \quad \begin{cases} P_1 = \mu, \\ P_3 = A'\mu^3 + B'\mu, \\ P_5 = C'\mu^5 + D'\mu^3 + E'\mu, \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

wo A, B, C, D, E, \dots und $A', B', C', D', E', \dots$ Constanten sind.

*) Wie man solches leicht erkennt mit Rücksicht auf die Note pg. 76.

**) Dieser Paragraph ist eingeschaltet worden vom Herausgeber.

Berechnet man aus den Formeln *linker Hand* successive $\mu^0, \mu^2, \mu^4, \dots$, und aus denen *rechter Hand* successive $\mu^1, \mu^3, \mu^5, \dots$, so erhält man

$$(2.) \quad \begin{cases} \mu^0 = P_0, \\ \mu^2 = \alpha P_0 + \beta P_2, \\ \mu^4 = \gamma P_0 + \delta P_2 + \varepsilon P_4, \\ \text{etc. etc.}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mu^1 = P_1, \\ \mu^3 = \alpha' P_1 + \beta' P_3, \\ \mu^5 = \gamma' P_1 + \delta' P_3 + \varepsilon' P_5, \\ \text{etc. etc.}, \end{cases}$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \dots$ wiederum *Constanten* sind.

Bezeichnet also q eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$, so wird die Potenz μ^q , je nachdem q *gerade* oder *ungerade* ist, entweder aus

$$P_0(\mu), \quad P_2(\mu), \quad P_4(\mu), \quad . \quad . \quad . \quad P_{q-2}(\mu), \quad P_q(\mu),$$

oder aus

$$P_1(\mu), \quad P_3(\mu), \quad P_5(\mu), \quad . \quad . \quad . \quad P_{q-2}(\mu), \quad P_q(\mu)$$

zusammensetzbar sein. Beide Fälle zusammenfassend, gelangt man zu folgendem Satz:

Ist q irgend eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$, so wird stets die Formel stattfinden:

$$(3.) \quad \mu^q = \mathfrak{A} P_q(\mu) + \mathfrak{B} P_{q-2}(\mu) + \mathfrak{C} P_{q-4}(\mu) \dots + \mathfrak{L} P_2(\mu),$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots \mathfrak{L}$ gewisse *Constanten* vorstellen, und wo $\lambda = 0$ oder $= 1$ ist, je nachdem die Zahl q *gerade* oder *ungerade*.

Multipliziert man die Formel (3.) mit $P_n(\mu) d\mu$, und integrirt über $\mu = -1 \dots +1$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \mu^q P_n(\mu) d\mu &= \mathfrak{A} \int_{-1}^{+1} P_q(\mu) P_n(\mu) d\mu + \mathfrak{B} \int_{-1}^{+1} P_{q-2}(\mu) P_n(\mu) d\mu \\ &\quad + \mathfrak{C} \int_{-1}^{+1} P_{q-4}(\mu) P_n(\mu) d\mu + \dots \end{aligned}$$

Die Integrale *rechts* werden aber [nach (I.) pg. 78] sämmtlich $= 0$ sein, falls man voraussetzt, dass n mit keiner der Zahlen

$$q, \quad q-2, \quad q-4, \quad q-6, \quad \dots$$

coincidirt. Man gelangt somit zu folgendem Satz:

Sind n und q irgend zwei Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, 3, 4, \dots$, so wird das Integral

$$(4.) \quad \int_{-1}^{+1} \mu^q P_n(\mu) d\mu$$

stets $= 0$ sein, falls n mit keiner der Zahlen $q, q-2, q-4, \dots$ coincidirt.

Oder ein wenig anders ausgedrückt: Das Integral wird stets $= 0$ sein, falls q mit keiner der Zahlen $n, n+2, n+4, \dots$ coincidirt.

Die Möglichkeit einer solchen Coincidenz ist aber von vornherein abgeschnitten, wenn man weiss, dass $q < n$ ist, oder wenn man weiss, dass die Zahlen q und n ungleichartig (die eine gerade, die andere ungerade) sind. Demgemäss kann man z. B. folgenden specielleren Satz hinzufügen:

Sind n und q irgend zwei Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ so wird das Integral

$$(5.) \quad \int_{-1}^{+1} \mu^q P_n(\mu) d\mu$$

stets $= 0$ sein, falls $q < n$ ist.

Will man alle Integrale der in Rede stehenden Form haben, so sind noch diejenigen Fälle zu untersuchen, in denen eine der in (4.) genannten Coincidenzen stattfindet. Mit andern Worten: Es sind als dann noch folgende Fälle zu untersuchen:

$$(6.) \quad \int_{-1}^{+1} \mu^n P_n(\mu) d\mu, \quad \int_{-1}^{+1} \mu^{n+2} P_n(\mu) d\mu, \quad \int_{-1}^{+1} \mu^{n+4} P_n(\mu) d\mu, \text{ etc. etc.}$$

Zu diesem Zweck gehen wir aus von der Formel (II.) pg. 78:

$$\frac{2}{2n+1} = \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_n(\mu) d\mu,$$

und substituiren hier für das erste $P_n(\mu)$ den bekannten Werth [vgl. (11.) pg. 30]:

$$P_n(\mu) = A_n \mu^n + B_n \mu^{n-2} + C_n \mu^{n-4} + \dots$$

Alsdann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2n+1} &= A_n \int_{-1}^{+1} \mu^n P_n(\mu) d\mu + B_n \int_{-1}^{+1} \mu^{n-2} P_n(\mu) d\mu \\ &\quad + C_n \int_{-1}^{+1} \mu^{n-4} P_n(\mu) d\mu + \dots \end{aligned}$$

In dieser Formel aber sind, zufolge des Satzes (5.), die mit B_n, C_n, D_n, \dots multiplicirten Integrale sämmtlich $= 0$; so dass wir also erhalten:

$$\frac{2}{2n+1} = A_n \int_{-1}^{+1} \mu^n P_n(\mu) d\mu.$$

Substituiren wir aber hier für A_n seinen bekannten Werth [vgl. (12.) pg. 30]:

$$A_n = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi^2(n)},$$

so erhalten wir:

$$(7.) \quad \int_{-1}^{+1} \mu^n P_n(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{2^n \Pi^2(n)}{\Pi(2n)} = \frac{2^{n+1} \Pi^2(n)}{\Pi(2n+1)}.$$

Hiermit ist das *erste* der Integrale (6.) berechnet. In analoger Weise wird man die Werthe der *übrigen* Integrale (6.) finden können; worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

§ 6.

Methoden zur Entwicklung einer gegebenen Function nach Kugelfunctionen. Erste Methode.

Wir haben bereits früher gesehen, dass eine beliebig gegebene und durchweg endliche Function $f(\mu, \varphi)$ *stets*, und *stets* nur auf *einerlei* Art nach Kugelfunctionen entwickelbar ist. [Vgl. die Sätze pg. 55 und 59.] Es handelt sich nun um die wirkliche Ausführung dieser Entwicklung:

$$(1.) \quad f(\mu, \varphi) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + \dots,$$

d. i. um die Bestimmung der Y 's. Substituirt man zuvörderst für die Y 's ihre eigentlichen Bedeutungen, d. i. die Ausdrücke (D.) pg. 76, so erhält man:

$$(2.) \quad \begin{aligned} f(\mu, \varphi) = & A_0^0 P_0(\mu) \\ & + A_1^0 P_1(\mu) + (A_1^1 \cos \varphi + B_1^1 \sin \varphi) P_{11}(\mu) \\ & + A_2^0 P_2(\mu) + (A_2^1 \cos \varphi + B_2^1 \sin \varphi) P_{21}(\mu) + (A_2^2 \cos 2\varphi + B_2^2 \sin 2\varphi) P_{22}(\mu) \\ & + \text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Es handelt sich also darum, die Constanten A, B wirklich zu berechnen, für den Fall, dass die Function $f(\mu, \varphi)$ gegeben ist.

Um zuvörderst die A 's der *ersten* Verticalreihe zu finden, multipliciren wir die Formel (2.) mit $P_n(\mu) d\mu d\varphi$, und integriren sodann über die ganze Kugelfläche, d. i. über $\mu = -1 \dots +1$ und $\varphi = 0 \dots 2\pi$. In solcher Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) P_n(\mu) d\mu d\varphi = \\ & = \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} [A_0^0 P_0(\mu) + A_1^0 P_1(\mu) + A_2^0 P_2(\mu) + \dots] P_n(\mu) d\mu d\varphi, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (I.), (II.) pg. 78:

$$(\alpha.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) P_n(\mu) d\mu d\varphi = A_n^0 \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Um ferner die A 's irgend welcher *andern* Verticalreihe zu finden, multipliciren wir die Gleichung (2.) mit $P_{nj}(\mu) \cos j\varphi d\mu d\varphi$, und integriren sodann wieder über die ganze Kugelfläche. In solcher Weise erhalten wir, mit Rücksicht auf (I.), (II.) pg. 79:

$$(\beta.) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) P_{nj}(\mu) \cos j\varphi d\mu d\varphi = A_n^j \frac{2\pi}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)}, \quad (j > 0).$$

Diese beiden Formeln ($\alpha.$) und ($\beta.$) sind, unter Anwendung der ε 's [(4.) pg. 70], zusammenfassbar in *eine* Formel, nämlich darstellbar durch die *erste* Gleichung des folgenden Formelpaares:

$$(3.) \quad \begin{aligned} A_n^j &= \frac{(2n+1)\varepsilon_j}{4\pi} \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) P_{nj}(\mu) \cos j\varphi d\mu d\varphi, \\ B_n^j &= \frac{(2n+1)\varepsilon_j}{4\pi} \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) P_{nj}(\mu) \sin j\varphi d\mu d\varphi. \end{aligned}$$

Die *zweite* Gleichung dieses Formelpaares ergibt sich in analoger Weise.

Diese Methode zur Bestimmung der A_n^j , B_n^j hat die Unbequemlichkeit, dass man dabei die Integration nach φ für jedes *einzelne* A_n^j oder B_n^j immer wieder von Neuem auszuführen hat. Dies vermeidet man bei Anwendung der jetzt zu exponirenden *zweiten* Methode.

§ 7.

Zweite Methode.

Man entwickelt die gegebene Function $f(\mu, \varphi)$ zuvörderst nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von φ :

$$(4.) \quad \begin{aligned} f(\mu, \varphi) &= C_0 + C_1 \cos \varphi + C_2 \cos 2\varphi \cdots + C_j \cos j\varphi + \cdots \\ &\quad + S_1 \sin \varphi + S_2 \sin 2\varphi \cdots + S_j \sin j\varphi + \cdots \end{aligned}$$

Alsdann sind die C, S Functionen von μ , und bestimmbar mittelst der Formeln:

$$(5.) \quad \begin{aligned} C_j &= \frac{\varepsilon_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) \cos j\varphi d\varphi, \\ S_j &= \frac{\varepsilon_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) \sin j\varphi d\varphi, \end{aligned}$$

wo die ε 's ihre gewöhnliche Bedeutung haben [vgl. (4.) pg. 70].

Vergleicht man nun die Formel (4.) mit der früheren Formel (2.), so ergibt sich sofort, und zwar für *jedes* j (inclusive $j = 0$):

$$(6.) \quad \begin{aligned} C_j &= A_j^j P_{jj}(\mu) + A_{j+1}^j P_{j+1,j}(\mu) + A_{j+2}^j P_{j+2,j}(\mu) + \cdots, \\ S_j &= B_j^j P_{jj}(\mu) + B_{j+1}^j P_{j+1,j}(\mu) + B_{j+2}^j P_{j+2,j}(\mu) + \cdots \end{aligned}$$

Multiplieirt man diese Gleichungen mit $P_{nj}(\mu)d\mu$, und integrirt über $\mu = -1 \cdots +1$, so erhält man mit Rücksicht auf (I.), (II.) pg. 79:

$$\int_{-1}^{+1} C_j P_{nj}(\mu) d\mu = A_n^j \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)},$$

$$\int_{-1}^{+1} S_j P_{nj}(\mu) d\mu = B_n^j \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)};$$

so dass man also für die A_n^j , B_n^j folgende Werthe erhält:

$$(7.) \quad A_n^j = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} \int_{-1}^{+1} C_j P_{nj}(\mu) d\mu,$$

$$B_n^j = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} \int_{-1}^{+1} S_j P_{nj}(\mu) d\mu.$$

Bei Anwendung dieser zweiten Methode wird man also zuvörderst die von μ abhängenden Functionen C_j , S_j mittelst der Formeln (5.), sodann aber die Constanten A_n^j , B_n^j mittelst der Formeln (7.) zu berechnen haben.

Bemerkung. — Häufig handelt es sich darum, eine unbekannte Function $f(\mu, \varphi)$ nicht durch theoretische Betrachtungen, sondern vielmehr auf Grund irgend welcher *Beobachtungen* zu bestimmen. Versteht man z. B. unter $f(\mu, \varphi)$ die *Temperatur an der Erdoberfläche*, so werden die Constanten A_n^j , B_n^j zu bestimmen sein auf Grund einzelner, etwa an den Stellen

$$(\mu_1, \varphi_1), (\mu_2, \varphi_2), (\mu_3, \varphi_3), \dots (\mu_G, \varphi_G)$$

angestellten Beobachtungen. Es handelt sich alsdann darum, jene Constanten A_n^j , B_n^j mittelst derjenigen G Gleichungen zu finden, die aus der Formel (2.) für jene G Beobachtungsstellen sich ergeben. Zu diesem Zwecke wird man die genannten G Gleichungen, durch Vernachlässigung der höheren Terme, so weit zu reduciren haben, dass die *Anzahl* der in ihnen enthaltenen Constanten A_n^j , B_n^j gerade $= G$ ist, und sodann dieselben nach diesen G Constanten aufzulösen haben.

Dieses im Allgemeinen sehr mühsame Geschäft der *Auflösung* der Gleichungen kann wesentlich erleichtert werden durch eine *zweckmässige Auswahl der Beobachtungsstellen*: wie solches später (im siebenten Capitel) näher dargelegt werden soll.

§ 8.

Betrachtung des besonderen Falles, dass die nach Kugelfunctionen zu entwickelnde Function nur von einem einzigen Argument abhängt.

Die angegebenen Entwicklungsmethoden sind anwendbar auf eine beliebig gegebene Function $f(\mu, \varphi)$, falls nur dieselbe auf der Kugelfläche überall endlich ist, also z. B. anwendbar auf das Product:

$$f(\mu, \varphi) = F(\mu) \cdot \cos 5\varphi,$$

falls nur $F(\mu)$ endlich ist im Intervall $\mu = -1 \cdots +1$. In diesem speciellen Falle ist offenbar die in (4.) enthaltene Function C_5 identisch mit $F(\mu)$, während alle übrigen C und S gleich Null sind. Demgemäss ergibt sich in diesem Falle aus (6.):

$$F(\mu) = C_5 = A_5^5 P_{55}(\mu) + A_6^5 P_{65}(\mu) + A_7^5 P_{75}(\mu) + \cdots$$

Und diese Formel zeigt also, dass die Function $F(\mu)$ entwickelbar ist nach den Functionen:

$$P_{55}(\mu), \quad P_{65}(\mu), \quad P_{75}(\mu), \text{ etc. etc.}$$

Die Zahl 5 war hier offenbar *ad libitum* gewählt. Nimmt man statt der 5 irgend welche andere Zahl 0, 1, 2, 3, etc. oder allgemein j , so gelangt man zu folgendem Resultat:

Eine im Intervall $\mu = -1 \cdots +1$ endliche, sonst aber beliebig gegebene Function $F(\mu)$ ist stets entwickelbar nach den Functionen: $P_{00}(\mu), P_{10}(\mu), P_{20}(\mu), \text{ etc. etc., d. i.}^*)$ nach den Functionen:

$$(8.) \quad P_0(\mu), \quad P_1(\mu), \quad P_2(\mu), \text{ etc. etc.}$$

Desgleichen ist eine solche Function $F(\mu)$ stets entwickelbar nach den Functionen:

$$(9.) \quad P_{11}(\mu), \quad P_{21}(\mu), \quad P_{31}(\mu), \text{ etc. etc.}$$

Allgemein: Sie ist stets entwickelbar nach den Functionen

$$(10.) \quad P_{jj}(\mu), \quad P_{j+1,j}(\mu), \quad P_{j+2,j}(\mu), \text{ etc. etc.,}$$

wobei j eine *ad libitum* zu wählende Zahl vorstellt.

*) Vgl. (3a.) pg. 70.

Fünftes Capitel.

Ueber die Gleichgewichtsfigur einer rotirenden incompressiblen Flüssigkeit.

Wir wollen die Theorie der Kugelfunctionen jetzt auf *physikalische* Fragen in Anwendung bringen, nämlich die Gleichgewichtsfigur einer *rotirenden incompressiblen Flüssigkeit* zu bestimmen suchen. Diese Betrachtung wird zugleich von Wichtigkeit sein für die Frage nach der *Figur der Erde*.

§ 1.

Ueber die zum Gleichgewicht erforderliche Oberflächenbedingung.

Soll eine gegebene incompressible Flüssigkeit im Gleichgewicht sein, so muss in jedem Punkte der Oberfläche die daselbst einwirkende Kraft gegen die Oberfläche senkrecht sein. Bezeichnet man also die auf einen *Oberflächenpunkt* $m(x, y, z)$ einwirkende Kraft mit (mX, mY, mZ) , und irgend eine *benachbarte* Oberflächenstelle mit $(x + dx, y + dy, z + dz)$, so muss die Gleichung stattfinden:

$$(1.) \quad mXdx + mYdy + mZdz = 0.$$

Wirken auf die Flüssigkeit *keine äussern* Kräfte ein, kommen also nur diejenigen Kräfte in Betracht, welche die einzelnen Flüssigkeitstheilchen *gegenseitig* aufeinander ausüben, so ist

$$(a.) \quad \begin{aligned} mX &= mk \frac{\partial V}{\partial x}, \\ mY &= mk \frac{\partial V}{\partial y}, \\ mZ &= mk \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo V das Potential der ganzen Flüssigkeit auf den Punkt (x, y, z) vorstellt, und wo k eine positive Constante bezeichnet. Es ergeben sich diese Formeln (a.) aus (10.) pg. 4, falls man nur beachtet,

dass die dortige Constante f im gegenwärtigen Falle $= -k$ ist [vgl. (4.) pg. 3], und ferner beachtet, dass die dort mit X, Y, Z benannten Kräfte gegenwärtig mit mX, mY, mZ bezeichnet sind.

Doch gelten die Formeln (α .) nur für den Fall der *Ruhe*. Befindet sich die Flüssigkeit in *Rotation* um eine bestimmte Axe, z. B. um die x -Axe des *Coordinatensystems*, so sind die Wirkungen der Centrifugalkraft mit in Rechnung zu bringen; so dass man alsdann an Stelle der Formeln (α .) folgende erhält:

$$\begin{aligned} mX &= mk \frac{\partial V}{\partial x} = m \frac{\partial W}{\partial x}, \\ (\beta.) \quad mY &= mk \frac{\partial V}{\partial y} + m\epsilon y = m \frac{\partial W}{\partial y}, \\ mZ &= mk \frac{\partial V}{\partial z} + m\epsilon z = m \frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo ϵ das *Quadrat der Winkelgeschwindigkeit* bezeichnet, und W die Bedeutung hat:

$$(\gamma.) \quad W = kV + \frac{\epsilon(y^2 + z^2)}{2}.$$

Die *Oberflächenbedingung* (1.) gewinnt alsdann, durch Substitution der Werthe (β .), folgende Gestalt:

$$\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = 0;$$

woraus folgt, dass W längs der Oberfläche *constant* sein muss. Demgemäss gewinnt also jene *Oberflächenbedingung* die Gestalt:

$$W = \text{Const.},$$

oder, falls man für W seine eigentliche Bedeutung (γ .) substituirt, folgende Gestalt:

$$(2.) \quad kV + \frac{\epsilon(y^2 + z^2)}{2} = \text{Const.}$$

Es handelt sich also darum, diejenige Figur der Flüssigkeit zu finden, welche dieser *Oberflächenbedingung* (2.) wirklich entspricht. Die *allgemeine* Lösung dieser Aufgabe ist sehr schwierig, und bis jetzt uns völlig verborgen. Wir wissen nicht einmal, *wie viel* Gleichgewichtsfiguren möglich sind. Zu den als möglich erkannten gehören *ellipsoide* und *ringförmige* Figuren, deren Form *Laplace* bestimmt hat. Ja es sind als Gleichgewichtsfiguren sogar *mehrere* Ellipsoide, und selbst ein *dreiaxiges* zu nennen, wie *Jacobi* entdeckte. Wir sind also durchaus nicht zu der Vorstellung berechtigt, dass die in Rede stehende Gleichgewichtsfigur unter allen Umständen eine *Rotationsfigur* sein müsse.

Wir werden im Folgenden zeigen, wie man auf Grund der Bedingung (2.) den Gleichgewichtszustand wirklich zu bestimmen vermag, — vorausgesetzt, dass die gegebene Rotationsgeschwindigkeit *sehr klein* ist.

§ 2.

Weitere Betrachtungen. Voraussetzung einer sehr geringen Rotationsgeschwindigkeit.

Es handelt sich um den *Gleichgewichtszustand* einer *sich selbst überlassenen**) rotirenden Flüssigkeit, also um einen Rotationszustand, der *in infinitum* fort dauert, — falls man nur voraussetzt, dass die Flüssigkeit auch im weiteren Verlaufe der Zeit beständig sich selbst überlassen bleibt. Dieser Zustand würde aber offenbar auch dann noch in ungeänderter Weise fortbestehen, wenn man in irgend einem Augenblicke die einzelnen Flüssigkeitstheilchen zu je zweien durch starre Linien verbinden, und so die Flüssigkeit in einen starren Körper verwandeln wollte. Hieraus folgt sofort**), dass der Schwerpunkt der rotirenden Flüssigkeit auf der Rotationsaxe liegen muss.

Dieser Schwerpunkt der Flüssigkeit mag dem bereits eingeführten Coordinatensystem (x, y, z) zum *Anfangspunkt* dienen. Es soll also die x -Axe identisch sein mit der durch den Schwerpunkt gehenden Rotationsaxe. Und gleichzeitig sollen die beiden andern vom Schwerpunkt ausgehenden Axen, nämlich die y -Axe und die z -Axe *theilnehmen an der Rotation der Flüssigkeit*. Ferner sei M die Masse der Flüssigkeit; und diese Masse sei so gross, dass sie im Zustande der Ruhe eine Kugel vom Radius A erfüllen würde. Also:

$$(3.) \quad M = \frac{4\pi q}{3} A^3,$$

wo q die *constante Dichtigkeit* der Flüssigkeit vorstellt.

Setzt man nun voraus, die gegebene Rotationsgeschwindigkeit sei *sehr klein*, so wird die Gleichgewichtsfigur der rotirenden Flüssigkeit ein nur sehr wenig von der Kugelform abweichendes Sphäroid sein, mithin die Oberfläche dieses Sphäroids darstellbar sein durch eine Gleichung von folgender Gestalt:

$$(4.) \quad R = A[1 + \alpha f(\mu, \varphi)],$$

wo A die in (3.) genannte Constante, und α eine noch unbekannte *sehr kleine* Constante vorstellen. Dabei repräsentiren R, μ, φ die Polarcoordinaten irgend eines Punktes jener Oberfläche, und $f(\mu, \varphi)$ eine

*) Wir nennen die Flüssigkeit eine *sich selbst überlassene*, weil auf dieselbe keine äussern Kräfte einwirken sollen.

**) Wir stützen uns hier auf einen bekannten Satz der Mechanik, der folgendermassen lautet: *Soll ein sich selbst überlassener starrer Körper beständig um ein und dieselbe Axe rotiren, so muss diese Axe durch den Schwerpunkt gehen, und identisch sein mit einer der dem Schwerpunkt entsprechenden Hauptaxen des Körpers.* Auch der letzte Theil dieses Satzes liesse sich für unsere Untersuchung verwerthen. Doch werden wir von demselben keinen Gebrauch machen.

noch unbekannte Function. Ob das Sphäroid in Bezug auf die Rotationsaxe symmetrisch ist oder nicht, — darüber können wir, angesichts der Jacobi'schen Entdeckung pg. 87, *a priori* kein Urtheil abgeben. Möglicherweise könnte ja dasselbe die Gestalt eines nur wenig von der Kugelform differirenden *dreiaxigen* Ellipsoids haben.

Denkt man sich nun die unbekannte Function $f(\mu, \varphi)$ nach Kugelfunctionen entwickelt:

$$(5.) \quad f(\mu, \varphi) = Y_0 + Y_1(\mu, \varphi) + Y_2(\mu, \varphi) + Y_3(\mu, \varphi) + \dots,$$

$$\text{d. i. } f(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \varphi),$$

so handelt es sich darum, die in dieser Entwicklung enthaltenen Y 's, sowie auch die Constante α , wirklich zu bestimmen auf Grund der *Oberflächenbedingung* (2.). Dabei sind λ und ε als *gegebene* Constanten anzusehen. Da nun ε , und ebenso auch α sehr klein ist, so werden bei Behandlung dieser Aufgabe die Grössen ε^2 , α^2 und $\varepsilon\alpha$ zu vernachlässigen sein.

Bevor wir die Aufgabe selber in Angriff nehmen, sei noch Folgendes bemerkt: Erhebt man die Formel (4.) zur h^{ten} Potenz, wo h irgend eine *positive oder negative Zahl* sein soll, so erhält man (weil α^2 zu vernachlässigen ist):

$$(6.) \quad R^h = A^h [1 + h\alpha f(\mu, \varphi)].$$

Substituirt man hier für $f(\mu, \varphi)$ den Werth (6.), so ergiebt sich:

$$R^h = A^h [(1 + h\alpha Y_0) + h\alpha Y_1(\mu, \varphi) + h\alpha Y_2(\mu, \varphi) + \dots].$$

Dies aber ist offenbar eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Entwicklung, die man auch so schreiben kann:

$$(7.) \quad R^h = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(h)}(\mu, \varphi),$$

wo alsdann die aufeinanderfolgenden Kugelfunctionen $Y_n^{(h)}(\mu, \varphi)$ folgende Werthe*) besitzen:

$$(7a.) \quad \begin{aligned} Y_0^{(h)} &= A^h (1 + h\alpha Y_0), \\ Y_1^{(h)}(\mu, \varphi) &= A^h h\alpha Y_1(\mu, \varphi), \\ Y_2^{(h)}(\mu, \varphi) &= A^h h\alpha Y_2(\mu, \varphi), \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Bildet man die Formel (6.) successive für irgend zwei Stellen (R, μ, φ) und (R_1, μ_1, φ_1) der Sphäroidoberfläche, und subtrahirt man die so entstehenden beiden Gleichungen von einander, so erhält man:

*) Eine Kugelfunction 0^{ter} Ordnung ist bekanntlich [vgl. die erste Bemerkung pg. 49] stets eine *Constante*. Aus diesem Grunde sind z. B. in den Formeln (5.) und (7a.) bei Y_0 und $Y_0^{(h)}$ die Argumente (μ, φ) *fortgelassen*.

$$\frac{R^h - R_1^h}{h} = A^h \alpha [f(\mu, \varphi) - f(\mu_1, \varphi_1)].$$

Multiplicirt man diese Formel endlich mit der aus (6.) entspringenden Gleichung:

$$R_1^j = A^j [1 + j \alpha f(\mu_1, \varphi_1)],$$

und beachtet man dabei, dass α^2 vernachlässigt werden soll, so ergibt sich:

$$\frac{R^h - R_1^h}{h} R_1^j = A^{h+j} \alpha [f(\mu, \varphi) - f(\mu_1, \varphi_1)],$$

oder, was dasselbe ist:

$$(8.) \quad \frac{R^h - R_1^h}{h} R_1^j = A^{h+j} \alpha F,$$

wo alsdann F die Bedeutung hat:

$$(8a.) \quad F = f(\mu, \varphi) - f(\mu_1, \varphi_1).$$

In (8.) bezeichnet j , ebenso wie h , eine ganz beliebige positive oder negative Zahl.

§ 3.

Discussion der Oberflächenbedingung.

Um die Oberflächenbedingung (2.) unsern Zwecken dienstbar zu machen, müssen wir die linke Seite derselben nach Kugelfunctionen zu entwickeln suchen.

Bezeichnet man die Polarcoordinaten irgend eines Flüssigkeitstheilchens $m(x, y, z)$ mit (ϱ, μ, φ) , setzt man also:

$$(9.) \quad \begin{aligned} x &= \varrho \mu, \\ y &= \varrho \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \\ z &= \varrho \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \end{aligned}$$

so wird $y^2 + z^2 = \varrho^2(1 - \mu^2)$, oder, was auf dasselbe hinauskommt*):

$$y^2 + z^2 = \frac{2\varrho^2}{3} [P_0(\mu) - P_2(\mu)].$$

Ist nun insbesondere der betrachtete Punkt (x, y, z) ein *Oberflächenpunkt* des Sphäroids, so sind seine Polarcoordinaten nicht (ϱ, μ, φ) , sondern (R, μ, φ) [vgl. (4.)]; so dass man in diesem Falle erhält:

$$y^2 + z^2 = \frac{2R^2}{3} [P_0(\mu) - P_2(\mu)].$$

Demgemäss gewinnt jene für alle *Oberflächenpunkte* des Sphäroids zu erfüllende Gleichung (2.) folgende Gestalt:

*) Denn es ist $P_0(\mu) = 1$ und $P_2(\mu) = \frac{3\mu^2 - 1}{2}$. Vgl. (10.) pg. 29.

$$kV + \frac{\varepsilon R^2}{3} [P_0(\mu) - P_2(\mu)] = \text{Const.}$$

Und diese Gleichung ist, falls man für R^2 seinen aus (6.) entspringenden Werth:

$$R^2 = A^2[1 + 2\alpha f(\mu, \varphi)]$$

substituirt, und beachtet, dass $\varepsilon\alpha$ zu vernachlässigen ist, auch so darstellbar:

$$(10.) \quad kV + \frac{\varepsilon A^2}{3} [P_0(\mu) - P_2(\mu)] = \text{Const.}$$

Wir werden also die linke Seite dieser Oberflächenbedingung nach Kugelfunctionen entwickelt haben, sobald es uns nur gelingt, das Potential V einer solchen Entwicklung zu unterwerfen.

Wir markiren auf der Oberfläche des Sphäroids irgend einen Punkt (R_1, μ_1, φ_1) und bezeichnen den Werth des Potentials V speciell für diesen Punkt mit V_1 . Um dieses V_1 näher zu bestimmen, legen wir durch den Punkt (R_1, μ_1, φ_1) eine *Hilfskugelfläche*, deren Centrum im Schwerpunkte des Sphäroids d. i. im Anfangspunkte des Coordinatensystems sich befinden soll, und deren Radius also $= R_1$ ist. Diese Kugelfläche wird die Sphäroidoberfläche in irgend welchen Curven schneiden, der Art, dass die Sphäroidoberfläche theils *ausserhalb*, theils *innerhalb* der Kugelfläche liegt. Demgemäss ist, was die Volumina betrifft:

$$(\text{Sphäroid}) = (\text{Kugel}) + \mathfrak{A} - \mathfrak{Z}.$$

D. h.: das Sphäroid entsteht aus der Kugel durch *Hinzufügung* gewisser Stücke, deren Gesammtheit \mathfrak{A} heissen mag, und durch *Fortnahme* gewisser anderer Stücke, deren Gesammtheit mit \mathfrak{Z} bezeichnet werden soll. Dabei sind all' diese Stücke von *sehr geringer Dicke*, weil die Sphäroidoberfläche von der Hilfskugelfläche nur sehr wenig abweicht.

Uebrigens mögen unter \mathfrak{A} und \mathfrak{Z} , je nach Umständen, bald die *Volumina* der eben genannten Stücke, bald aber auch die denselben entsprechenden *Theile der Hilfskugelfläche* verstanden werden. Im letztern Falle wird alsdann \mathfrak{A} denjenigen Theil dieser Fläche repräsentiren, welcher von den Stücken \mathfrak{A} bedeckt ist, und \mathfrak{Z} denjenigen Theil derselben, welcher von den Stücken \mathfrak{Z} bedeckt ist; der Art, dass die Flächentheile \mathfrak{A} und \mathfrak{Z} zu einander *complementär* sind, nämlich zusammengenommen die *ganze* Hilfskugelfläche repräsentiren.

Das Potential V_1 des Sphäroids auf den Punkt (R_1, μ_1, φ_1) kann dadurch erhalten werden, dass man zunächst das Potential der *Kugel* auf diesen Punkt bildet, sodann das Potential der Stücke \mathfrak{A} hinzudaddirt, und endlich noch das Potential der Stücke \mathfrak{Z} subtrahirt. Bezeichnet man also irgend ein zu \mathfrak{A} oder \mathfrak{Z} gehöriges Volumelement

mit $q^2 d\varrho d\mu d\varphi$, und den Abstand dieses Elementes vom Punkte (R_1, μ_1, φ_1) mit E , so erhält man:

$$(f.) \quad V_1 = \frac{4\pi q R_1^2}{3} + q \iiint_{\mathfrak{A}} \frac{q^2 d\varrho d\mu d\varphi}{E} - q \iiint_{\mathfrak{B}} \frac{q^2 d\varrho d\mu d\varphi}{E},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente von \mathfrak{A} , resp. von \mathfrak{B} . Hieraus folgt, falls man für $\frac{1}{E}$ die bekannte Entwicklung [pg. 46] substituirt, und überdies durch q dividirt:

$$(g.) \quad \frac{V_1}{q} = \frac{4\pi R_1^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \iiint_{\mathfrak{A}} \frac{P_n(\cos \gamma) R_1^n d\varrho d\mu d\varphi}{q^{n+1}} - \iiint_{\mathfrak{B}} \frac{P_n(\cos \gamma) q^{n+2} d\varrho d\mu d\varphi}{R_1^{n+1}} \right\},$$

wo γ die Neigung der variablen Richtung (μ, q) gegen die feste Richtung (μ_1, φ_1) bezeichnet. Die Integrationen nach q sind sofort ausführbar. Bezeichnet man den der Richtung (μ, φ) entsprechenden Radiusvector der Sphäroidoberfläche, wie gewöhnlich, mit R , so ist bei \mathfrak{A} zu integriren von $q = R_1$ bis $q = R$, hingegen bei \mathfrak{B} umgekehrt von $q = R$ bis $q = R_1$. Demgemäss erhält man:

$$(h.) \quad \frac{V_1}{q} = \frac{4\pi R_1^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \iint_{\mathfrak{A}} \left[\frac{R^{-n+2}}{n+2} - \frac{R_1^{-n+2}}{n+2} R_1^n \right] P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi \right. \\ \left. + \iint_{\mathfrak{B}} \left[\frac{R^{n+3}}{n+3} - R_1^{n+3} \left(\frac{1}{R_1} \right)^{n+1} \right] P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi \right\},$$

wo das eine Integral über den mit \mathfrak{A} bezeichneten Theil der Hülfskugelfläche, das andere über den mit \mathfrak{B} bezeichneten Theil dieser Fläche ausgedehnt zu denken ist.

In der Formel (h.) ist nun das erste Glied rechter Hand

$$= \frac{4\pi}{3} A^2 [1 + 2\alpha f(\mu_1, \varphi_1)]$$

[vgl. (6.)]; während andererseits die in (h.) in den eckigen Klammern enthaltenen Ausdrücke beide $= A^2 \alpha F$ sind [vgl. (8.)]. Somit folgt:

$$(j.) \quad \frac{V_1}{q} = \frac{4\pi}{3} A^2 [1 + 2\alpha f(\mu_1, \varphi_1)] + \alpha A^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \iint_{\mathfrak{A}} F P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi + \iint_{\mathfrak{B}} F P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi \right\}.$$

Die hier auftretenden Integrale erstrecken sich über zwei Theile der Hülfskugelfläche, die zu einander *complementär* sind, und repräsentiren daher zusammengenommen ein einziges über die *ganze* Kugelfläche sich ausdehnendes Integral; so dass man also erhält:

$$(k.) \quad \frac{V_1}{q} = \frac{4\pi}{3} A^2 [1 + 2\alpha f(\mu_1, \varphi_1)] + \\ + \alpha A^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} F P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi \right\}.$$

Das hier stehende Integral ist, falls man für F seinen Werth (8a.) einsetzt, auch so darstellbar:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi - f(\mu_1, \varphi_1) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi,$$

oder, falls man für $f(\mu, \varphi)$ die Entwicklung (5.) substituirt, und die Integraleigenschaften der Kugelfunctionen [(I.), (Ia.), (II.) pg. 77] zur Anwendung bringt, auch so darstellbar:

$$\frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\mu_1, \varphi_1) = \begin{cases} 4\pi f(\mu_1, \varphi_1), & \text{falls } n = 0, \\ 0 \dots\dots, & \text{falls } n \neq 0. \end{cases}$$

Somit folgt aus (k.):

$$(m.) \quad \frac{V_1}{q} = \frac{4\pi}{3} A^2 - 4\pi\alpha A^2 \left\{ \frac{f(\mu_1, \varphi_1)}{3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} Y_n(\mu_1, \varphi_1) \right\},$$

oder, falls man für $f(\mu_1, \varphi_1)$ die aus (5.) sich ergebende Entwicklung substituirt:

$$(11.) \quad V_1 = \frac{4\pi q}{3} A^2 \left\{ 1 - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-1)}{2n+1} Y_n(\mu_1, \varphi_1) \right\}.$$

Dies ist der Werth des Potentials in dem zu Anfang *ad libitum* markirten Oberflächenpunkte (R_1, μ_1, φ_1) . Und der Werth des Potentials in irgend einem *andern* Oberflächenpunkte (R, μ, φ) wird daher in *analoger* Weise lauten:

$$(12.) \quad V = \frac{4\pi q}{3} A^2 \left\{ 1 - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-1)}{2n+1} Y_n(\mu, \varphi) \right\}.$$

Nachdem in solcher Weise *die Entwicklung von V nach Kugelfunctionen wirklich bewerkstelligt ist*, substituiren wir jetzt diese Entwicklung in unsere *Oberflächenbedingung* (10.), und dividiren dabei zugleich durch $\frac{4\pi q k}{3} A^2$. Alsdann gewinnt jene Bedingung die Gestalt:

$$(13.) \quad 1 - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-1)}{2n+1} Y_n(\mu, \varphi) = (\text{Const.}) - \frac{\varepsilon}{4\pi q k} [P_0(\mu) - P_2(\mu)].$$

Diese Bedingung soll erfüllt sein für sämtliche Oberflächenpunkte, also für beliebige Werthe der Variablen μ, φ . Sollen aber zwei nach Kugelfunctionen fortschreitende Entwicklungen für beliebige Werthe der Variablen μ, φ untereinander gleich sein, so folgt hieraus, dass in beiden Entwicklungen die Kugelfunctionen gleicher Ordnung *einzel-*

einander gleich sind [vgl. die Zusätze pg. 60]. Demgemäss ergeben sich aus (13.) folgende Gleichungen:

$$(A.) \quad 1 + 2\alpha Y_0 = (\text{Const.}) - \frac{\varepsilon}{4\pi q k},$$

$$(B.) \quad 0 = 0,$$

$$(C.) \quad -\frac{2\alpha}{5} Y_2(\mu, \varphi) = \frac{\varepsilon}{4\pi q k} P_2(\mu),$$

$$(D.) \quad Y_3(\mu, \varphi) = 0,$$

$$(E.) \quad Y_4(\mu, \varphi) = 0,$$

etc. etc. etc.

Man erhält also:

$$(14.) \quad Y_2(\mu, \varphi) = -\frac{5\varepsilon}{8\pi q k \alpha} P_2(\mu),$$

$$Y_3(\mu, \varphi) = Y_4(\mu, \varphi) = Y_5(\mu, \varphi) = \dots = 0;$$

während Y_0 und $Y_1(\mu, \varphi)$ noch unbekannt bleiben.

§ 4.

Ergänzung.

Um Y_0 und $Y_1(\mu, \varphi)$ zu bestimmen, bemerken wir, dass die Masse des Sphäroids $= M$ ist, und dass sein Schwerpunkt im Anfangspunkte liegt, dass mithin die Gleichungen stattfinden:

$$(\alpha.) \quad \Sigma m = M,$$

$$\Sigma m x = 0, \quad \Sigma m y = 0, \quad \Sigma m z = 0,$$

die Summation ausgedehnt gedacht über alle Theilchen $m(x, y, z)$ der ganzen Flüssigkeit. Unter Anwendung der Polareordinaten (9.) nehmen diese Gleichungen ($\alpha.$) folgende Gestalt an:

$$q \iiint \varrho^2 d\varrho d\mu d\varphi = M,$$

$$(\beta.) \quad \iiint \varrho^3 \mu d\varrho d\mu d\varphi = 0,$$

$$\iiint \varrho^3 \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi d\varrho d\mu d\varphi = 0,$$

$$\iiint \varrho^3 \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi d\varrho d\mu d\varphi = 0,$$

wo q die constante Dichtigkeit der Flüssigkeit vorstellt, und wo die Integration nach ϱ hinzerstrecken ist von $\varrho = 0$ bis $\varrho = R$ [vgl. (4.)]. Führt man diese Integration nach ϱ in der ersten Formel ($\beta.$) wirklich aus, und substituirt man dabei zugleich für M seinen Werth (3.), so erhält man:

$$(\gamma.) \quad q \iint \frac{R^3}{3} d\mu d\varphi = \frac{4\pi q}{3} A^3;$$

in analoger Weise ergibt sich aus den *übrigen* Gleichungen (β):

$$(\delta.) \quad \left. \begin{aligned} \iint R^4 \mu d\mu d\varphi &= 0, \\ \iint R^4 \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi d\mu d\varphi &= 0, \\ \iint R^4 \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi d\mu d\varphi &= 0. \end{aligned} \right| \begin{aligned} \mu_1 \\ \sqrt{1-\mu_1^2} \cos \varphi_1 \\ \sqrt{1-\mu_1^2} \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

Versteht man nun unter γ die Neigung der variablen Richtung (μ, φ) gegen irgend eine *feste* Richtung (μ_1, φ_1) , so ist:

$$\cos \gamma = \mu \mu_1 + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu_1^2} \cos (\varphi - \varphi_1).$$

Multipliziert man also die Formeln (δ .) mit den beigesetzten Factoren, und addirt, so ergibt sich:

$$(\varepsilon.) \quad \iint R^4 \cos \gamma d\mu d\varphi = 0.$$

Die Formeln (γ .) und (ε .) sind, weil $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ ist, auch so darstellbar:

$$\begin{aligned} \iint R^3 P_0(\cos \gamma) d\mu d\varphi &= 4\pi A^3, \\ \iint R^4 P_1(\cos \gamma) d\mu d\varphi &= 0, \end{aligned}$$

und können daher, indem man für R^3 und R^4 die aus (7.) entspringenden Entwicklungen:

$$\begin{aligned} R^3 &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(3)}(\mu, \varphi), \\ R^4 &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(4)}(\mu, \varphi) \end{aligned}$$

substituirt, auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(3)}(\mu, \varphi) \right) P_0(\cos \gamma) d\mu d\varphi &= 4\pi A^3, \\ \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(4)}(\mu, \varphi) \right) P_1(\cos \gamma) d\mu d\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus aber folgt, auf Grund der bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunctionen [vgl. (I), (II.) pg. 77]:

$$\begin{aligned} Y_0^{(3)} &= A^3, \\ Y_1^{(4)}(\mu_1, \varphi_1) &= 0, \end{aligned}$$

oder, falls man für $Y_0^{(3)}$ und $Y_1^{(4)}(\mu_1, \varphi_1)$ ihre aus (7a.) ersichtlichen Werthe substituirt:

$$\begin{aligned} A^3(1 + 3\alpha Y_0) &= A^3, \\ A^4 4\alpha Y_1(\mu_1, \varphi_1) &= 0, \end{aligned}$$

oder einfacher geschrieben:

$$Y_0 = 0 \quad \text{und} \quad Y_1(\mu_1, \varphi_1) = 0.$$

Die letzte Formel gilt, weil die Richtung (μ_1, φ_1) *ad libitum* gewählt war, für jede *beliebige* Richtung, also z. B. auch für die Richtung (μ, φ) ; so dass man also schreiben kann:

$$(15.) \quad Y_0 = 0 \quad \text{und} \quad Y_1(\mu, \varphi) = 0.$$

Hiermit sind diejenigen Y 's bestimmt, welche vorhin, in (14.), noch unbekannt geblieben waren.

§ 5.

Bestimmung der Gleichgewichtsfigur. Ueber die Figur der Erde.

Substituirt man die in (14.), (15.) erhaltenen Werthe der Y 's in die Formeln (5.), (4.), d. i. in die Formeln:

$$(16.) \quad \begin{cases} f(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \varphi), \\ R = A[1 + \alpha f(\mu, \varphi)], \end{cases}$$

so erhält man:

$$(17.) \quad \begin{cases} f(\mu, \varphi) = Y_2(\mu, \varphi) = -\frac{5\varepsilon}{8\pi q k \alpha} P_2(\mu), \\ R = A \left[1 - \frac{5\varepsilon}{8\pi q k} P_2(\mu) \right]. \end{cases}$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$(18.) \quad \delta = -\frac{15\varepsilon}{16\pi q k},$$

und beachtet man, dass $P_2(\mu) = \frac{3}{2} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right)$ ist [vgl. (10.) pag. 29], so folgt:

$$(19.) \quad \begin{cases} f(\mu, \varphi) = Y_2(\mu, \varphi) = -\frac{\delta}{\alpha} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right), \\ R = A \left[1 - \delta \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \right]. \end{cases}$$

Das δ repräsentirt [vgl. (18.)], ebenso wie ε selber, eine *sehr kleine* Grösse, deren zweite Potenz zu vernachlässigen ist. Mit Rücksicht hierauf folgt aus (19.):

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{A^2} \left[1 + 2\delta \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{A^2} \left[\left(1 - \frac{2\delta}{3} \right) + 2\delta \mu^2 \right],$$

oder, weil $\mu = \cos \vartheta$ ist:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{A^2} \left[\left(1 - \frac{2\delta}{3} \right) (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) + 2\delta \cos^2 \vartheta \right],$$

oder, besser geordnet:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2 \vartheta}{A^2} \left(1 + \frac{4\delta}{3}\right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{A^2} \left(1 - \frac{2\delta}{3}\right),$$

oder, falls man von Neuem die zweite Potenz von δ vernachlässigt:

$$(20.) \quad \frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2 \vartheta}{\left[A\left(1 - \frac{2\delta}{3}\right)\right]^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\left[A\left(1 + \frac{\delta}{3}\right)\right]^2}.$$

Diese Formel zeigt in deutlicher Weise, dass das zu untersuchende Sphäroid ein Rotationsellipsoid ist, und dass die halben Axen dieses Ellipsoids die Werthe haben:

$$(21.) \quad R_p = A\left(1 - \frac{2\delta}{3}\right), \quad R_a = A\left(1 + \frac{\delta}{3}\right).$$

Dabei bezeichnet R_p diejenige Halbachse, welche nach einem der beiden Pole des Ellipsoids hinläuft; während R_a den Radius des Aequators repräsentirt.

Für die sogenannte Abplattung des Ellipsoids, d. h. für den Bruch

$$\frac{R_a - R_p}{R_p},$$

ergiebt sich aus (21.) der Werth:

$$\frac{R_a - R_p}{R_p} = \frac{\delta}{1 - \frac{2\delta}{3}},$$

also, falls man das Quadrat von δ von Neuem vernachlässigt, und gleichzeitig für δ seine eigentliche Bedeutung (18.) substituirt:

$$(22.) \quad \frac{R_a - R_p}{R_p} = \delta = \frac{15\varepsilon}{16\pi qk} = \frac{5\varepsilon}{4} \left(\frac{3}{4\pi qk}\right).$$

Diese Formel involvirt einen ziemlich einfachen physikalischen Satz. Um näher hierauf einzugehen, denke man sich *ausserhalb* des rotirenden Flüssigkeitsellipsoids und zwar *auf der Verlängerung seiner Axe* einen materiellen Punkt m . Alsdann wird die von der Flüssigkeit auf diesen Punkt m ausgeübte Wirkung mg nach dem Centrum des Ellipsoids gerichtet sein, und den Werth haben:

$$(23.) \quad mg = -mk \frac{\partial V}{\partial \varrho},$$

wo ϱ den Abstand des Punktes m vom Centrum vorstellt, während V das von der Flüssigkeitsmasse auf den Punkt m ausgeübte Potential bezeichnet. Zerlegt man nun die Flüssigkeitsmasse durch eine um das Centrum mit dem Radius R_p beschriebene, also durch die beiden Pole gehende Hilfskugelfläche in zwei Theile, so hat V den Werth:

$$V = \frac{4\pi q R_p^3}{3} \frac{1}{\varrho} + \alpha\Phi,$$

wo α dieselbe *sehr kleine* Constante, wie z. B. in (4.), vorstellt, und $\alpha\Phi$ denjenigen Theil des Potentials repräsentirt, welcher von der ausserhalb der Kugelfläche befindlichen *sehr dünnen* Schaafe herrührt. Demgemäss folgt aus (23.):

$$g = \frac{4\pi q k R_p^3}{3} \frac{1}{\varrho^2} - k\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}.$$

Hieraus folgt, falls man $\varrho = R_p$ werden lässt, und für diesen Fall das g mit g_p bezeichnet:

$$g_p = \left(\frac{4\pi q k}{3} \right) R_p - k\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=R_p}.$$

Löst man diese Gleichung auf nach der Grösse $\left(\frac{4\pi q k}{3} \right)$, oder vielmehr nach dem *Reciproken* dieser Grösse, so erhält man:

$$(24.) \quad \frac{3}{4\pi q k} = \frac{R_p}{g_p} + \alpha\Psi,$$

wo $\alpha\Psi$ einen sehr kleinen (nämlich mit dem Factor α behafteten) Ausdruck vorstellt. Substituirt man schliesslich diesen Werth (24.) in der rechten Seite von (22.), und beachtet, dass ε^2, α^2 und $\varepsilon\alpha$ zu vernachlässigen sind, so erhält man:

$$(25.) \quad \frac{R_a - R_p}{R_p} = \frac{5\varepsilon}{4} \frac{R_p}{g_p}.$$

Wäre also unsere Erde eine rotirende incompressible Flüssigkeit, so würde ihre Abplattung

$$(26.) \quad = \frac{5\varepsilon}{4} \frac{R_p}{g_p}$$

sein, wo ε das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, g_p die Schwere am Pol, und R_p den nach dem Pol laufenden Erdradius vorstellt.

Man kann diesen Satz übrigens noch ein wenig anders einkleiden. Offenbar wird nämlich die Differenz ($R_p - R_a$) den Factor ε enthalten, also etwa mit $\varepsilon\Lambda$ zu bezeichnen sein:

$$(\alpha.) \quad R_p - R_a = \varepsilon\Lambda;$$

denn sie verschwindet für $\varepsilon = 0$, weil in diesem Falle die Flüssigkeit eine ruhende Kugel sein würde. In genau derselben Weise erhält man offenbar:

$$(\beta.) \quad g_p - g_a = \varepsilon M,$$

falls man nämlich unter g_a die Schwere am Aequator versteht. Dergleichen ergeben sich in solcher Weise auch folgende allgemeinere Formeln:

$$(\gamma.) \quad R_p - R = \varepsilon N,$$

$$(\delta.) \quad g_p - g = \varepsilon \Xi,$$

wo R einen *beliebigen* Erdradius, und g die Intensität der Schwere an einem *beliebigen* Orte der Erdoberfläche vorstellen sollen*). Substituirt man nun auf der *rechten* Seite der Formel (25.) für R_p den aus ($\gamma.$), und für g_p den aus ($\delta.$) resultirenden Werth, und beachtet man dabei, dass das Quadrat von ε zu vernachlässigen ist, so erhält man:

$$(27.) \quad \frac{R_a - R_p}{R_p} = \frac{5}{4} \frac{\varepsilon R}{g},$$

wo g als die Schwere an einem *beliebigen* Orte der Erdoberfläche, oder schlechtweg als die *Schwere* (ohne nähere Determination) zu bezeichnen ist, während εR die *am Aequator vorhandene Centrifugalkraft* repräsentirt.

Demgemäss kann man auf Grund der Formel (27.) folgenden Satz hinstellen:

Wäre unsere Erde eine rotirende incompressible Flüssigkeit, so würde ihre Abplattung dadurch zu erhalten sein, dass man die am Aequator vorhandene Centrifugalkraft durch die Schwere dividirt, und den so entstehenden Quotienten noch mit $\frac{5}{4}$ multiplicirt.

Bemerkung. — Substituirt man in (27.) für ε, R, g ihre durch Beobachtung gefundenen Werthe, so erhält man:

$$(I.) \quad \frac{R_a - R_p}{R_p} = \frac{5}{4} \frac{\varepsilon R}{g} = \frac{1}{232}.$$

Zu einem ganz andern Resultate gelangt man, wenn man annimmt, dass die gesammte Anziehung der Erde von ihrem *Centrum* ausgeht. Alsdann nämlich ergibt sich, was hier nicht weiter erläutert werden soll, an Stelle der Formel (I.), folgende Formel:

$$(II.) \quad \frac{R_a - R_p}{R_p} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon R}{g} = \frac{1}{580}.$$

Die Wirklichkeit liegt *zwischen* diesen beiden extremen Formeln (I.) und (II.), von denen die *erstere* die Dichtigkeit der Erde als *überall gleich* voraussetzt, während die *letzte* auf der Annahme basirt, die Dichtigkeit der Erde sei nach dem Centrum hin so vehement ansteigend, dass die Anziehung der an der Oberfläche vorhandenen Schichten gegen die der innern Schichten vernachlässigt werden dürfe. In der That ergeben die Gradmessungen:

$$(III.) \quad \frac{R_a - R_p}{R_p} \text{ ungefähr } = \frac{1}{290}, \text{ d. i. etwa } = \frac{\varepsilon R}{g}.$$

*) Die *erste* der vier Formeln ($\alpha.$), ($\beta.$), ($\gamma.$), ($\delta.$) ist übrigens nichts Neues; sondern schon in (25.) enthalten.

Die theoretischen Betrachtungen geben also nur zwei *Grenzen*, zwischen denen die Erdaabplattung liegen muss. *Sie sagen aus* [vgl. (I.), (II.)], *dass man zwei solche Grenzen erhält, wenn man die Centrifugalkraft am Aequator durch die Schwere dividirt, und diesen Quotienten einmal mit $\frac{5}{4}$, das andere Mal mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt**.

§ 6.

Die scheinbare Schwere als Function der geographischen Breite.

Wir betrachten, ebenso wie im letzten Paragraph, die Erde als ein rotirendes Flüssigkeitsellipsoid, und stellen uns die Aufgabe, die *scheinbare Schwere* an der Oberfläche dieses Ellipsoids näher zu bestimmen. Dabei soll unter der scheinbaren Schwere die Resultante der *eigentlichen Schwere* (d. i. der Anziehung) und der *Centrifugalkraft* verstanden sein.

Bezeichnet man die *scheinbare Schwere* für irgend einen auf der Oberfläche oder nahe an der Oberfläche gelegenen Punkt (x, y, z) mit g , und die den Coordinatenaxen entsprechenden Componenten von g mit X, Y, Z , und benutzt man überdies den schon früher [pg. 87] eingeführten Ausdruck:

$$(1.) \quad W = kV + \frac{\varepsilon(y^2 + z^2)}{2} = kV + \frac{\varepsilon \varrho^2(1 - \mu^2)}{2},$$

wo (ϱ, μ, φ) die Polarcoordinaten des Punktes (x, y, z) vorstellen, so ist:

$$X = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Desgleichen wird die Componente von g nach der Richtung ϱ den Werth haben $\frac{\partial W}{\partial \varrho}$. Wir wollen diese Componente, gerechnet in der zu ϱ *entgegengesetzten* d. i. in der *centripetalen* Richtung, mit P bezeichnen, und erhalten alsdann also die Formel:

$$(2.) \quad P = -\frac{\partial W}{\partial \varrho}, \quad \text{d. i.} \quad = -k \frac{\partial V}{\partial \varrho} - \varepsilon \varrho(1 - \mu^2), \quad [\text{vgl. (1.)}].$$

Lässt man nun vom Punkte (x, y, z) oder (ϱ, μ, φ) zwei zu ϱ senkrechte Richtungen ausgehen, die *eine* m in der Meridianebene liegend die andere p senkrecht zur Meridianebene, so wird die Componente von g nach der Richtung m den Factor ε enthalten, also mit εM zu bezeichnen sein; denn sie verschwindet für $\varepsilon = 0$, weil in diesem Falle das Ellipsoid eine ruhende Kugel sein würde. Andererseits wird die Componente von g nach der Richtung p *Null* sein, weil der Ausdruck W (1.) von φ unabhängig ist. Die Kraft g selber ist aber die Resultante von P und εM , folglich:

*) *Laplace: Méc. céleste. Tome 2, Livre 3, Chap. 4, No. 30.*

$$g = \sqrt{P^2 + \varepsilon^2 M^2} = P + \varepsilon^2 \frac{M^2}{2P} + \dots$$

Hieraus aber ergibt sich, weil ε^2 stets vernachlässigt werden soll:

$$g = P,$$

also mit Rücksicht auf (2.):

$$(3.) \quad g = -k \frac{\partial V}{\partial \varrho} - \varepsilon \varrho (1 - \mu^2).$$

Hiermit ist die Bestimmung von g reducirt auf die Berechnung von $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$.

Diese Ableitung $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ lässt sich nun in ähnlicher Weise berechnen, wie im vorhergehenden Paragraph V selber bestimmt wurde. Wir markiren auf der Ellipsoidoberfläche irgend einen Punkt (R_1, μ_1, φ_1) , bezeichnen ferner einen beliebigen Punkt auf der *Verlängerung* des Radiusvectors R_1 mit $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$ und den Werth des Potentials V für diesen *letztern* Punkt mit V_1 . Construiren wir nun eine mit dem Ellipsoid concentrische, durch den Punkt (R_1, μ_1, φ_1) hindurchgehende *Hilfskugelfläche*, und bedienen wir uns der Bezeichnungen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} in demselben Sinne wie im vorhergehenden Paragraph, so erhalten wir [vgl. (f.) pg. 92]:

$$(4.) \quad V_1 = \frac{4\pi \varrho R_1^3}{3} \frac{1}{\varrho_1} + \varrho \iiint_{\mathfrak{A}} \frac{\varrho^2 d\varrho d\mu d\varphi}{E} - \varrho \iiint_{\mathfrak{B}} \frac{\varrho^2 d\varrho d\mu d\varphi}{E}.$$

Hier bezeichnet $\varrho^2 d\varrho d\mu d\varphi$ irgend ein zu \mathfrak{A} resp. \mathfrak{B} gehöriges Volumenelement, und E den Abstand dieses Elements vom Punkte $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$. Differenzirt man diese Formel nach ϱ_1 , und schiebt man hierauf den variablen Punkt $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$ längs der Linie ϱ_1 dicht heran an die Ellipsoidoberfläche, ihn in solcher Weise zur Coincidenz bringend mit dem anfangs markirten Punkte (R_1, μ_1, φ_1) , so erhält man, indem man zugleich durch ϱ dividirt:

$$(5.) \quad \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1} \right)_{\varrho_1=R_1} = - \frac{4\pi R_1}{3} + \\ + \iiint_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{1}{E} \right)_{\varrho_1=R_1} \varrho^2 d\varrho d\mu d\varphi - \iiint_{\mathfrak{B}} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{1}{E} \right)_{\varrho_1=R_1} \varrho^2 d\varrho d\mu d\varphi.$$

Die hier eingeklammerten und mit dem Index $\varrho_1 = R_1$ versehenen beiden Ausdrücke können in einfacher Weise gebildet werden. So z. B. kann der *erste* dadurch erhalten werden, dass man ϱ_1 zuvörderst $< R_1$ macht, und sodann bis R_1 *wachsen* lässt, und der *zweite* dadurch, dass man umgekehrt $\varrho_1 > R_1$ macht, und bis R_1 *abnehmen* lässt. In solcher Weise ergeben sich für diese Ausdrücke respective die Werthe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n R_1^{n-1}}{\varrho^{n+1}} P_n(\cos \gamma), \quad \text{und} \quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \varrho^n}{R_1^{n+2}} P_n(\cos \gamma).$$

Dabei bezeichnet γ die Neigung der variablen Richtung (μ, φ) gegen die feste Richtung (μ_1, φ_1) . Substituirt man diese Ausdrücke in (5.), so erhält man:

$$(6.) \quad \frac{1}{q} \left(\frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1} \right)_{\varrho_1=R_1} = -\frac{4\pi R_1}{3} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \iiint_{\mathfrak{U}} n P_n(\cos \gamma) \frac{R_1^{n-1} d\varrho d\mu d\varphi}{\varrho^{n-1}} + \right. \\ \left. + \iiint_{\mathfrak{S}} \frac{(n+1) P_n(\cos \gamma) \varrho^{n+2} d\varrho d\mu d\varphi}{R_1^{n+2}} \right\}.$$

Diese Integrale sind sehr ähnlich den früheren Integralen in (g.) pg. 92. In der That erhält man *diese* Integrale aus den *dortigen*, wenn man dort unter den Integralzeichen die Factoren $\frac{n}{R_1}$ resp. $-\frac{(n+1)}{R_1}$ hinzufügt. Ebenso also, wie wir damals von der Formel (g.) pg. 92 zur Formel (j.) pg. 92 gelangt sind, in gleicher Weise werden wir gegenwärtig von der Formel (6.) aus zu folgender Formel hingelaufen:

$$(7.) \quad \frac{1}{q} \left(\frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1} \right)_{\varrho_1=R_1} = -\frac{4\pi}{3} A[1 + \alpha f(\mu_1, \varphi_1)] + \\ + \alpha A^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \iint_{\mathfrak{U}} \frac{n F P_n(\cos \gamma)}{R_1} d\mu d\varphi - \iint_{\mathfrak{S}} \frac{(n+1) F P_n(\cos \gamma)}{R_1} d\mu d\varphi \right\},$$

wo (ebenso wie früher) die Flüssigkeitsoberfläche durch die Gleichung

$$(8.) \quad R = A[1 + \alpha f(\mu, \varphi)]$$

dargestellt gedacht wird, und überdies (ebenso wie früher) zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(9.) \quad F = f(\mu, \varphi) - f(\mu_1, \varphi_1).$$

Substituirt man in (7.) unter den Integralzeichen für R_1 den aus (8.) entspringenden Werth, so erhält man, weil α^2 zu vernachlässigen ist:

$$(10.) \quad \frac{1}{q} \left(\frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1} \right)_{\varrho_1=R_1} = -\frac{4\pi}{3} A[1 + \alpha f(\mu_1, \varphi_1)] + \\ + \alpha A \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \iint_{\mathfrak{U}} n F P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi - \iint_{\mathfrak{S}} (n+1) F P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi \right\}.$$

Die hier auftretende Summe — sie mag kurzweg mit S bezeichnet werden — ist auch so darstellbar:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2n+1) \iint_{\mathfrak{U}} F P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi - (n+1) \iint_{\mathfrak{S}} F P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi \right\},$$

wo das *letzte* Integral über $(\mathfrak{A} + \mathfrak{S})$, d. i. über die *ganze* Kugelfläche sich erstreckt. Aber auch das *erste* Integral kann über die *ganze* Kugelfläche ausgedehnt werden, falls man nur daselbst statt F eine neue Function Ψ substituirt, die auf \mathfrak{A} identisch mit F , hingegen auf \mathfrak{S} identisch mit *Null* ist. Man erhält in solcher Weise:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2n+1) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Psi P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi - (n+1) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} F P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi \right\}.$$

Denkt man sich Ψ nach Kugelfunctionen entwickelt:

$$\Psi = \Psi(\mu, \varphi) = \Psi_0 + \Psi_1(\mu, \varphi) + \Psi_2(\mu, \varphi) + \dots,$$

so ergibt sich mittelst der Integraleigenschaften der Kugelfunctionen [vgl. (I.), (II.), pg. 77]:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Psi P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} \Psi_n(\mu_1, \varphi_1),$$

und folglich:

$$(\alpha.) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Psi P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\mu_1, \varphi_1),$$

$$(\beta.) \quad \text{d. i.} = 4\pi \Psi(\mu_1, \varphi_1) = \text{Null}.$$

Denn die Function $\Psi(\mu, \varphi)$ ist ihrer Definition zufolge auf \mathfrak{A} identisch mit F , d. i. mit $f(\mu, \varphi) - f(\mu_1, \varphi_1)$, und auf \mathfrak{S} identisch mit *Null*; und demgemäss ergibt sich von der einen wie von der andern Seite her, dass diese Function $\Psi(\mu, \varphi)$ in dem auf der Grenze von \mathfrak{A} und \mathfrak{S} befindlichem Punkte (μ_1, φ_1) *verschwindet*.

Nach $(\alpha.)$, $(\beta.)$ ist der *erste* Theil der Summe S gleich *Null*; so dass man also erhält:

$$S = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} F P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi.$$

Es ist aber: $F = f(\mu, \varphi) - f(\mu_1, \varphi_1)$, also auf Grund des in (17.) pg. 96 für $f(\mu, \varphi)$ erhaltenen Werthes:

$$F = Y_2(\mu, \varphi) - Y_2(\mu_1, \varphi_1).$$

Somit folgt:

$$S = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_2(\mu, \varphi) P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi + Y_2(\mu_1, \varphi_1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi.$$

Und hieraus ergibt sich, falls man abermals die Integraleigenschaften der Kugelfunctionen beachtet, und namentlich auch beachtet, dass $P_0(\cos \gamma) = 1$, die Formel:

$$S = -\frac{3.4\pi}{5} Y_2(\mu_1, \varphi_1) + 4\pi Y_2(\mu_1, \varphi_1),$$

d. i.

$$S = \frac{2.4\pi}{5} Y_2(\mu_1, \varphi_1).$$

Substituirt man jetzt in der Formel (10.) für die Summe S diesen Werth, und substituirt man dort gleichzeitig für $f(\mu_1, \varphi_1)$ den Werth $Y_2(\mu_1, \varphi_1)$, [vgl. (17.) pg. 96], so erhält man:

$$(11.) \quad \frac{1}{q} \left(\frac{\partial V_1}{\partial \varphi_1} \right)_{\varphi_1 \rightarrow R_1} = -\frac{4\pi}{3} A [1 + \alpha Y_2(\mu_1, \varphi_1)] + \frac{2.4\pi}{5} \alpha A Y_2(\mu_1, \varphi_1),$$

oder einfacher geschrieben:

$$(12.) \quad \frac{1}{q} \left(\frac{\partial V_1}{\partial \varphi_1} \right)_{\varphi_1 = R_1} = -\frac{4\pi}{3} A \left[1 - \frac{\alpha}{5} Y_2(\mu_1, \varphi_1) \right],$$

oder, falls man für $Y_2(\mu_1, \varphi_1)$ seinen Werth [vgl. (19.) pg. 96] einsetzt:

$$(13.) \quad \frac{1}{q} \left(\frac{\partial V_1}{\partial \varphi_1} \right)_{\varphi_1 \rightarrow R_1} = -\frac{4\pi}{3} A \left[1 + \frac{\delta}{5} \left(\mu_1^2 - \frac{1}{3} \right) \right].$$

Diese Formel ist hier abgeleitet worden für den anfangs auf der Ellipsoidoberfläche *beliebig* markirten Punkt (R_1, μ_1, φ_1) , und daher auch gültig für jeden *andern* solchen Oberflächenpunkt (R, μ, φ) ; also:

$$(14.) \quad \frac{1}{q} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=R} = -\frac{4\pi}{3} A \left[1 + \frac{\delta}{5} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \right].$$

Wir kehren jetzt endlich zurück zur Formel (3.):

$$g = -k \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \varepsilon \varphi (\mu^2 - 1).$$

Lässt man hier den Punkt (φ, μ, φ) hinwandern nach irgend einem Oberflächenpunkte (R, μ, φ) , so erhält man:

$$g = -k \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=R} + \varepsilon R (\mu^2 - 1),$$

oder, falls man für R den Werth (8.) substituirt, und beachtet, dass $\varepsilon \alpha$ zu vernachlässigen ist:

$$g = -k \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=R} + \varepsilon A (\mu^2 - 1).$$

Hieraus aber folgt unter Benutzung des in (14.) erhaltenen Resultates:

$$g = \frac{4\pi q k A}{3} \left[1 + \frac{\delta}{5} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{3\varepsilon}{4\pi q k} (\mu^2 - 1) \right],$$

oder, weil $\frac{3\varepsilon}{4\pi qk} = \frac{4\delta}{5}$ ist [vgl. 18.) pg. 96]:

$$g = \frac{4\pi qkA}{3} \left[1 + \frac{\delta}{5} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{4\delta}{5} (\mu^2 - 1) \right],$$

oder, was dasselbe ist:

$$(15.) \quad g = \frac{4\pi qkA}{3} \left[\left(1 - \frac{13\delta}{15} \right) + \delta\mu^2 \right].$$

Bezeichnet man also z. B. die scheinbare Schwere am Aequator mit g_a , so wird:

$$(16.) \quad g_a = \frac{4\pi qkA}{3} \left(1 - \frac{13\delta}{15} \right),$$

so dass man erhält:

$$g - g_a = \frac{4\pi qkA}{3} \delta\mu^2.$$

Substituirt man endlich in dieser letzten Formel für $\frac{4\pi qkA}{3}$ den aus (16.) resultirenden Werth, und beachtet man dabei, dass das Quadrat von δ zu vernachlässigen ist, so folgt:

$$g - g_a = g_a \delta\mu^2,$$

d. i.

$$(17.) \quad g = g_a (1 + \delta\mu^2).$$

Die Grösse $\mu = \cos \vartheta$ ist offenbar $= \sin \Theta$, wo Θ den Winkel vorstellt, unter welchem der nach dem betrachteten Oberflächenpunkte (R, μ, φ) hinlaufende Radiusvector R gegen den Aequator geneigt ist. Bezeichnet man die *geographische Breite* dieses Punktes mit B , so ist ferner:

$$\mu = \sin \Theta = (\sin B) + \varepsilon \Phi;$$

denn für $\varepsilon = 0$ muss $\Theta = B$ werden. Substituirt man diesen Werth von μ in (17.), und beachtet man, dass die *zweiten Dimensionen* von $\varepsilon, \alpha, \delta$ zu vernachlässigen sind, so erhält man:

$$(18.) \quad g = g_a (1 + \delta \sin^2 B).$$

Hier ist nach (22.) p. 97 und (27.) pg. 99:

$$(19.) \quad \delta = \frac{R_a - R_p}{R_p} = \frac{5}{4} \frac{\varepsilon R}{g};$$

und es repräsentirt also dieses δ die sogenannte *Abplattung der Erde*. Demgemäss gelangt man, auf Grund der Formel (18.), zu folgendem von *Clairaut**) aufgestelltem Satz:

*) *Clairaut: Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique. Paris, 1743; pg. 191.* Der $\sin B$ ist daselbst mit x , und g_a mit π bezeichnet.

Clairaut'sches Theorem. Wäre die Erde eine rotirende Flüssigkeit von überall gleicher Dichtigkeit, so würde die scheinbare Schwere g als Function der geographischen Breite B darstellbar sein durch die Formel:

$$(20.) \quad g = g_a(1 + \delta \sin^2 B),$$

wo g_a die scheinbare Schwere am Aequator, und δ die Abplattung der Erde vorstellen.

Wendet man dieses Theorem auf den Pol an, d. i. auf $B = 90^\circ$, so ergibt sich:

$$(21.) \quad g_p = g_a(1 + \delta), \quad \text{d. i.} \quad g_a = g_p(1 - \delta),$$

folglich: $-\delta = \frac{g_a - g_p}{g_p}$

Combinirt man aber diese Formel (21.) mit (19.), so erhält man folgende durch ihre Symmetrie ausgezeichneten Gleichungen:

$$(22.) \quad \frac{R_a - R_p}{R_p} + \frac{g_a - g_p}{g_p} = 0,$$

$$(23.) \quad \frac{R_a - R_p}{R_p} - \frac{g_a - g_p}{g_p} = 2\delta = \frac{5}{2} \frac{\varepsilon R}{g}.$$

§ 7.

Ueber die Theorie der Ebbe und Fluth. Aufstellung der Oberflächenbedingung.

Wir wollen jetzt die Figur einer rotirenden Flüssigkeit von Neuem untersuchen, und zwar unter Mitberücksichtigung solcher Kräfte, die *ausserhalb* der Flüssigkeit ihren Sitz haben. Oder auf die Erde angewendet: Wir wollen bei Bestimmung der Figur der Erde die Einwirkungen der *übrigen* Himmelskörper M_1, M_2, M_3, \dots (namentlich die Wirkung von *Sonne* und *Mond*) mit in Anschlag bringen, um in solcher Weise eine Vorstellung zu erhalten von der *Theorie der Ebbe und Fluth*. Dabei werden wir jene Himmelskörper, wegen ihrer grossen Entfernung von der Erde, durchweg als *Punkte* ansehen dürfen.

Es handelt sich zuvörderst um die Bewegung einer beliebigen, theils von *innern*, theils von *äussern* Kräften sollicitirten Flüssigkeit*). Ist m irgend ein Theilchen dieser Flüssigkeit, und $m\mathbf{R}$ die *Resultante sämmtlicher auf m einwirkender äusserer und innerer Kräfte*, so gelten bekanntlich für die Bewegung von m die Differentialgleichungen:

*) Statt der *Flüssigkeit* könnte ebensogut ein ganz beliebiges materielles System genommen werden. Es wird aber zweckmässig sein, bei der Flüssigkeit zu bleiben, um in solcher Weise unserer allgemeinen Betrachtung gleich von vornherein die für ihre spätere Anwendung geeignete Gestalt zu geben.

$$(1.) \quad ma'' = m\mathfrak{A}, \quad mb'' = m\mathfrak{B}, \quad mc'' = m\mathfrak{C},$$

wo $m\mathfrak{A}$, $m\mathfrak{B}$, $m\mathfrak{C}$ die Componenten von $m\mathfrak{R}$, und a , b , c die Coordinaten des Theilchens m vorstellen. Dabei sollen durch die Accente Differentiationen nach der Zeit angedeutet sein; so dass z. B. a'' für $\frac{d^2 a}{dt^2}$ steht. Denkt man sich die Formeln (1.) der Reihe nach gebildet für alle Theilchen m der ganzen Flüssigkeit, und all' diese Formeln summirt, so erhält man:

$$(2.) \quad Ma_0'' = \Sigma m\mathfrak{A}, \quad Mb_0'' = \Sigma m\mathfrak{B}, \quad Mc_0'' = \Sigma m\mathfrak{C},$$

wo $M = \Sigma m$ die *Gesamtmasse* der Flüssigkeit vorstellt, während a_0 , b_0 , c_0 die Coordinaten ihres Schwerpunktes bezeichnen. •

Diese Formeln (1.), (2.) sind aber nur dann gültig, wenn das der Betrachtung zu Grunde gelegte rechtwinklige Axensystem — es mag dasselbe mit (a, b, c) bezeichnet werden — ein *absolut festes* ist. Wir wollen gegenwärtig die Form untersuchen, welche diese Differentialgleichungen annehmen bei Einführung eines *neuen* und zwar in *Bewegung begriffenen* rechtwinkligen Axensystems (x, y, z) . Der Anfangspunkt dieses neuen Systems sei der in Bewegung begriffene Schwerpunkt der Flüssigkeit, d. i. der Punkt (a_0, b_0, c_0) . Ferner sei die x -Axe des neuen Systems *von unveränderlicher Richtung*, nämlich fort-dauernd parallel mit der a -Axe des absolut festen Systems. Um diese x -Axe aber mag das neue System (x, y, z) in *gleichförmiger Rotation* begriffen sein, so dass also die y -Axe und z -Axe ihre Stellungen im absoluten Raume von Augenblick zu Augenblick ändern.

Es handelt sich darum, die Differentialgleichungen (1.) auf das *in Bewegung begriffene* Axensystem (x, y, z) zu übertragen. Bezeichnet man die Coordinaten des Theilchens m in Bezug auf dieses System mit (x, y, z) , ferner die Componenten der Kraft $m\mathfrak{R}$ nach den Axen dieses Systems mit $(m\mathfrak{X}, m\mathfrak{Y}, m\mathfrak{Z})$, so ist offenbar:

$$(3.) \quad \begin{cases} a - a_0 = x, \\ b - b_0 = y \cos \psi - z \sin \psi, \\ c - c_0 = y \sin \psi + z \cos \psi, \end{cases}$$

und ferner:

$$(4.) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \mathfrak{X}, \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{Y} \cos \psi - \mathfrak{Z} \sin \psi, \\ \mathfrak{C} = \mathfrak{Y} \sin \psi + \mathfrak{Z} \cos \psi, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{mithin} \\ \text{umgekehrt:} \end{array} \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = + \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{Y} = + \mathfrak{B} \cos \psi + \mathfrak{C} \sin \psi, \\ \mathfrak{Z} = - \mathfrak{B} \sin \psi + \mathfrak{C} \cos \psi, \end{cases}$$

wo ψ das *gleichförmig wachsende* Azimuth der xy -Ebene gegen die absolut feste ab -Ebene vorstellt. Aus den Formeln (3.) folgt durch Differentiation nach der Zeit:

$$a' - a_0' = x',$$

$$b' - b_0' = (y' \cos \psi - z' \sin \psi) + (-y \sin \psi - z \cos \psi) \psi',$$

$$c' - c_0' = (y' \sin \psi + z' \cos \psi) + (+y \cos \psi - z \sin \psi) \psi',$$

und hieraus durch nochmalige Differentiation nach der Zeit:

$$a'' - a_0'' = x'',$$

$$b'' - b_0'' = (y'' \cos \psi - z'' \sin \psi) + 2(-y' \sin \psi - z' \cos \psi) \psi' + (-y \cos \psi + z \sin \psi) \psi'^2,$$

$$c'' - c_0'' = (y'' \sin \psi + z'' \cos \psi) + 2(y' \cos \psi - z' \sin \psi) \psi' + (-y \sin \psi - z \cos \psi) \psi'^2;$$

denn es ist zu beachten, dass $\psi'' = 0$ ist, weil nach unserer Festsetzung die Drehung des Axensystem (x, y, z) um die x -Axe *gleichförmig*, mithin ψ eine *lineare* Function der Zeit sein soll. — Das letzte Formelsystem ist leicht auflösbar nach x'', y'', z'' . Man erhält:

$$x'' = + (a'' - a_0''),$$

$$y'' = + (b'' - b_0'') \cos \psi + (c'' - c_0'') \sin \psi + 2z' \psi' + y \psi'^2,$$

$$z'' = - (b'' - b_0'') \sin \psi + (c'' - c_0'') \cos \psi - 2y' \psi' + z \psi'^2.$$

Substituirt man hier für a'', b'', c'' und a_0'', b_0'', c_0'' die aus (1.), (2.) entspringenden Werthe, und bezeichnet man gleichzeitig die *constante* Winkelgeschwindigkeit ψ' mit ω , so erhält man:

$$x'' = + \left(\mathfrak{A} - \frac{\Sigma m \mathfrak{A}}{M} \right),$$

$$(5.) \quad y'' = + \left(\mathfrak{B} - \frac{\Sigma m \mathfrak{B}}{M} \right) \cos \psi + \left(\mathfrak{C} - \frac{\Sigma m \mathfrak{C}}{M} \right) \sin \psi + 2\omega z' + \omega^2 y,$$

$$z'' = - \left(\mathfrak{B} - \frac{\Sigma m \mathfrak{B}}{M} \right) \sin \psi + \left(\mathfrak{C} - \frac{\Sigma m \mathfrak{C}}{M} \right) \cos \psi - 2\omega y' + \omega^2 z.$$

Diese Formeln (5.) lassen sich vereinfachen mittelst der Relationen (4.) rechter Hand. Nach jenen Relationen ist z. B. $\mathfrak{A} = \mathfrak{X}$, mithin:

$$(\alpha.) \quad \mathfrak{A} - \frac{\Sigma m \mathfrak{A}}{M} = \mathfrak{X} - \frac{\Sigma m \mathfrak{X}}{M}.$$

Ferner ist zufolge jener Relationen:

$$\mathfrak{B} \cos \psi + \mathfrak{C} \sin \psi = \mathfrak{Y},$$

woraus durch Multiplication mit m und Summation folgt:

$$(\Sigma m \mathfrak{B}) \cos \psi + (\Sigma m \mathfrak{C}) \sin \psi = \Sigma m \mathfrak{Y}.$$

Subtrahirt man aber diese Formel, nachdem sie durch M dividirt ist, von der vorhergehenden, so erhält man:

$$(\beta.) \quad \left(\mathfrak{B} - \frac{\Sigma m \mathfrak{B}}{M} \right) \cos \psi + \left(\mathfrak{C} - \frac{\Sigma m \mathfrak{C}}{M} \right) \sin \psi = \mathfrak{Y} - \frac{\Sigma m \mathfrak{Y}}{M}.$$

Und in analoger Weise ergibt sich aus jenen Relationen:

$$(\gamma.) \quad -\left(\mathfrak{B} - \frac{\Sigma m \mathfrak{B}}{M}\right) \sin \psi + \left(\mathfrak{C} - \frac{\Sigma m \mathfrak{C}}{M}\right) \cos \psi = \mathfrak{Z} - \frac{\Sigma m \mathfrak{Z}}{M}.$$

Mit Rücksicht auf $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ gewinnen nun die Formeln (5.), falls man noch mit m , multiplicirt, die einfachere Gestalt:

$$\begin{aligned} mx'' &= m \left(\mathfrak{X} - \frac{\Sigma m \mathfrak{X}}{M} \right), \\ (6.) \quad my'' &= m \left(\mathfrak{Y} - \frac{\Sigma m \mathfrak{Y}}{M} \right) + 2m\omega \mathfrak{Z}' + m\omega^2 y, \\ mz'' &= m \left(\mathfrak{Z} - \frac{\Sigma m \mathfrak{Z}}{M} \right) - 2m\omega y' + m\omega^2 z. \end{aligned}$$

Diese Formeln (6.) wollen wir jetzt auf die *Erde* in Anwendung bringen, indem wir uns dabei die Erde als eine *rotirende Flüssigkeit* vorstellen, deren einzelne Theilchen nicht nur ihren gegenseitigen Anziehungen unterliegen, sondern auch noch sollicitirt werden von den Himmelskörpern M_1 , M_2 , M_3 , etc. Die Rotationsaxe dieser Flüssigkeit wird, weil die Einwirkung jener Himmelskörper eine nur sehr unbedeutende ist, *nahezu* durch den Schwerpunkt der Flüssigkeit gehen. Was nun die in den Gleichungen (6.) angewendeten Axen (x, y, z) betrifft, so wollen wir die x -Axe zusammenfallen lassen mit der Rotationsaxe der Flüssigkeit, und die y - und z -Axe theilnehmen lassen an der Rotation der Flüssigkeit. Auch können wir, um die Vorstellung zu fixiren, den Anfangspunkt des Systems (x, y, z) so legen, dass die yz -Ebene durch den Schwerpunkt der Flüssigkeit hindurch geht.

Die Formeln (6.) gelten für die *relative Bewegung* der einzelnen Flüssigkeitstheilchen m in Bezug auf das selber in Bewegung begriffene Axensystem (x, y, z) . Es handelt sich hier aber nicht um die *relative Bewegung*, sondern vielmehr um das *relative Gleichgewicht*, d. h. um denjenigen Zustand, bei welchem die Configuration der Flüssigkeit in Bezug auf jenes Axensystem *constant* bleibt. Für diesen Zustand des relativen Gleichgewichts sind aber $x', y', z', x'', y'', z''$ gleich *Null*; so dass also die Formeln (6.) für denselben folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} 0 &= m \left(\mathfrak{X} - \frac{\Sigma m \mathfrak{X}}{M} \right), \\ (7.) \quad 0 &= m \left(\mathfrak{Y} - \frac{\Sigma m \mathfrak{Y}}{M} \right) + m\epsilon y, \\ 0 &= m \left(\mathfrak{Z} - \frac{\Sigma m \mathfrak{Z}}{M} \right) + m\epsilon z, \end{aligned}$$

wo, ebenso wie früher, $\omega^2 = \epsilon$ gesetzt ist.

Bemerkung. — Es handelt sich hier, wie man bereits erkannt haben wird, um Vorstellungen, die nur *approximativ* zulässig sind. Denn strenge genommen kann, weil die Himmelskörper M_1, M_2, M_3 , etc. ihre relative Lage zur Erde von Augenblick zu Augenblick ändern, von einem relativen *Gleichgewicht* der flüssig gedachten Erde nicht die Rede sein. In der That werden wir auch im Folgenden nicht die *wirkliche* Theorie der Ebbe und Fluth entwickeln, sondern vielmehr untersuchen, wie diese Theorie sich gestalten *würde*, falls die relative Lage jener Himmelskörper in Bezug auf die Erde *constant* bliebe. Dabei aber steht wohl zu erwarten, dass die Lösung dieses *fingirten* Problems einigermassen eine Annäherung sein wird an die Lösung desjenigen Problems, welches die Natur in Wirklichkeit uns darbietet.

Die das Flüssigkeitstheilchen m sollicitirende Kraft (mX, mY, mZ) repräsentirt [ihrer Definition nach; vgl. pg. 106, 107] die Resultante *aller* auf m einwirkenden *inneren* und *äusseren* Kräfte, und ist daher zusammengesetzt einerseits aus derjenigen Einwirkung

$$(mX, mY, mZ),$$

welche m von den übrigen Flüssigkeitstheilchen erleidet, und andererseits aus denjenigen Wirkungen

$$(mX_1, mY_1, mZ_1), (mX_2, mY_2, mZ_2), \text{ etc.},$$

welche m von den Himmelskörpern M_1, M_2 , etc. erfährt. Demgemäss ist z. B.:

$$(A.) \quad mX = mX + mX_1 + mX_2 + \dots$$

und folglich*):

$$(B.) \quad \Sigma mX = 0 + \Sigma mX_1 + \Sigma mX_2 + \dots$$

Aus diesen Formeln (A.), (B.) folgt sofort:

$$(C.) \quad m \left(X - \frac{\Sigma mX}{M} \right) = mX + \mathfrak{S} m \left(X_h - \frac{\Sigma mX_h}{M} \right),$$

wo der deutsche Buchstabe \mathfrak{S} eine Summation andeutet über alle in Betracht kommenden Himmelskörper M_h (M_1, M_2 , etc.).

Was in (C.) die einzelnen Glieder *rechter* Hand betrifft, so repräsentirt das erste Glied mX das *eigentliche Hauptglied*, während die übrigen mit h behafteten, von den einzelnen Himmelskörpern M_h herrührenden Glieder als *störende Glieder* zu betrachten sind, welche im

*) Die *inneren* Kräfte, d. h. die von den *gegenseitigen* Einwirkungen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen herrührenden Kräfte werden offenbar von solcher Beschaffenheit sein, dass sie sich, sobald man die Flüssigkeit als *starr* betrachtet, *gegenseitig zerstören*. Demgemäss werden diese inneren Kräfte mX, mY, mZ den Formeln entsprechen:

$$\Sigma mX = 0, \quad \Sigma mY = 0, \quad \Sigma mZ = 0.$$

Und mit Rücksicht hierauf ergibt sich sofort der Uebergang von (A.) zu (B.).

Vergleich mit jenem Hauptgliede *sehr klein* sind. In Folge dieser Kleinheit der Störungsglieder wird es ausreichend sein, dieselben nur in erster Annäherung zu berechnen.

Jenes eigentliche Hauptglied hat offenbar den Werth:

$$(D.) \quad mX = m \left(\frac{\partial p}{\partial x} + k \frac{\partial V}{\partial x} \right),$$

wo V , ebenso wie früher, das *Potential* der ganzen Flüssigkeitsmasse in Bezug auf den Punkt (x, y, z) bezeichnet, während p den an dieser Stelle vorhandenen *hydrostatischen Druck* repräsentirt.

Was andererseits die störenden Glieder betrifft, so bezeichne man die Coordinaten des Himmelskörpers M_h mit (x_h, y_h, z_h) und den Abstand dieses (punktförmig gedachten) Körpers vom Flüssigkeitstheilchen $m(x, y, z)$ mit E_h . Alsdann erhält man:

$$(E.) \quad mX_h = km M_h \frac{x_h - x}{E_h^3} = km M_h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{E_h} \right),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(E') \quad mX_h = - km M_h \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{1}{E_h} \right);$$

woraus durch Summation über alle Theilchen m der ganzen Flüssigkeit sich ergibt:

$$(F.) \quad \sum mX_h = - k M_h \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\sum \frac{m}{E_h} \right).$$

Die hier auftretende Summe

$$\sum \frac{m}{E_h}$$

repräsentirt das Potential der ganzen Flüssigkeitsmasse auf den (punktförmig gedachten) Himmelskörper M_h , und kann daher, weil es sich hier um die Störungsglieder, mithin nur um die erste Annäherung handelt, $= \frac{M}{R_h}$ gesetzt werden, wo R_h den Abstand des Himmelskörpers M_h vom Anfangspunkte des Coordinatensystems (x, y, z) vorstellt:

$$(G.) \quad R_h^2 = x_h^2 + y_h^2 + z_h^2.$$

Somit folgt aus (F.):

$$\sum mX_h = - k M_h \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{M}{R_h} \right) = k M M_h \frac{x_h}{R_h^3},$$

mithin:

$$(H.) \quad m \frac{\sum mX_h}{M} = km M_h \frac{x_h}{R_h^3} = km M_h \frac{\partial U_h}{\partial x},$$

wo alsdann U_h die Bedeutung hat:

$$(J.) \quad U_h = \frac{xx_h + yy_h + zz_h}{R_h^3}.$$

Nunmehr folgt aus (E.) und (H.) durch Subtraction:

$$(K.) \quad m \left(X_h - \frac{\Sigma m X_h}{M} \right) = km M_h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_h} - U_h \right);$$

so dass also die Formel (C.) durch Substitution der Werthe (D.) und (K.) folgende Gestalt gewinnt:

$$(L.) \quad m \left(\mathfrak{X} - \frac{\Sigma m \mathfrak{X}}{M} \right) = m \frac{\partial}{\partial x} \left[p + kV + k \mathfrak{S} M_h \left(\frac{1}{R_h} - U_h \right) \right].$$

Lässt man aber für

$$m \left(\mathfrak{X} - \frac{\Sigma m \mathfrak{X}}{M} \right), \quad m \left(\mathfrak{Y} - \frac{\Sigma m \mathfrak{Y}}{M} \right), \quad m \left(\mathfrak{Z} - \frac{\Sigma m \mathfrak{Z}}{M} \right)$$

den Ausdruck (L.) und die damit analogen Ausdrücke in die Gleichungen (7.) eintreten, so erhält man:

$$(8.) \quad \begin{aligned} 0 &= m \frac{\partial (p + W)}{\partial x}, \\ 0 &= m \frac{\partial (p + W)}{\partial y}, \\ 0 &= m \frac{\partial (p + W)}{\partial z}. \end{aligned}$$

wo W die Bedeutung hat:

$$(9.) \quad W = \left[kV + k \mathfrak{S} M_h \left(\frac{1}{R_h} - U_h \right) \right] + \frac{\varepsilon(y^2 + z^2)}{2}.$$

Dabei bezeichnet p den *hydrostatischen Druck*, und U_h den in (J.) angegebenen Ausdruck:

$$(10.) \quad U_h = \frac{xx_h + yy_h + zz_h}{R_h^3}, \quad \text{wo } R_h = \sqrt{x_h^2 + y_h^2 + z_h^2}.$$

Aus (8.) folgt, dass $(p + W)$ in ganzer Erstreckung der Flüssigkeitsmasse *constant* ist. Diese Gleichung

$$(11.) \quad p + W = \text{Const.}$$

führt sodann aber, weil der hydrostatische Druck an der Oberfläche der Flüssigkeit überall = 0 ist, zu dem Resultate, dass, speciell an der Oberfläche, W selber überall constant ist. Und diese *Oberflächenbedingung*:

$$(12.) \quad W = \text{Const.}$$

gewinnt, falls man für W seinen Werth (9.) substituirt, die Gestalt:

$$(13.) \quad kV + \frac{\varepsilon(y^2 + z^2)}{2} + k \mathfrak{S} M_h \left(\frac{1}{R_h} - U_h \right) = \text{Const.}$$

Sie unterscheidet sich also von der früher [(2.) pg. 87] gefundenen Oberflächenbedingung nur durch die von den M_h abhängenden Glieder; was *a priori* zu erwarten stand.

§ 8.

Weiteres über Ebbe und Fluth. Discussion der erhaltenen Oberflächenbedingung.

Es handelt sich darum, die Oberfläche der rotirenden Flüssigkeit, auf Grund der erhaltenen Oberflächenbedingung (13.), näher zu bestimmen. Denkt man sich jene Oberfläche, ebenso wie früher, durch die Gleichung dargestellt:

$$(14.) \quad R = A[1 + \alpha f(\mu, \varphi)],$$

und die unbekannte Function $f(\mu, \varphi)$ nach Kugelfunctionen entwickelt:

$$(15.) \quad f(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \varphi),$$

so ergibt sich, ebenso wie früher [vgl. (12.) pg. 93] für das Potential V , d. i. für den *ersten Term* der Oberflächenbedingung (13.), der Werth:

$$kV = \frac{4\pi qkA^2}{3} \left[1 - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-1)}{2n+1} Y_n(\mu, \varphi) \right],$$

d. i. der Werth:

$$(16.) \quad kV = \frac{4\pi qkA^2}{3} \left[(1 + 2\alpha Y_0) - \frac{2\alpha}{5} Y_2(\mu, \varphi) - \frac{4\alpha}{7} Y_3(\mu, \varphi) - \frac{6\alpha}{9} Y_4(\mu, \varphi) - \dots \right].$$

Auch erhält man, ebenso wie damals [vgl. pg. 90, 91] für $\frac{\varepsilon(y^2 + z^2)}{2}$, d. i. für den *zweiten Term* jener Oberflächenbedingung (13.), den Werth:

$$(17.) \quad \frac{\varepsilon(y^2 + z^2)}{2} = \frac{\varepsilon A^2}{3} [P_0(\mu) - P_2(\mu)].$$

Was endlich die in der Oberflächenbedingung (13.) enthaltenen *Störungsglieder* betrifft, so bezeichne man ebenso wie in (14.), (15.), (16.), (17.) die Polarcordinaten irgend eines an der Oberfläche liegenden Flüssigkeitstheilchens $m(x, y, z)$ mit (R, μ, φ) und die Polarcordinaten des Himmelskörpers $M_h(x_h, y_h, z_h)$ mit (R_h, μ_h, φ_h) . Alsdann erhält man für den Abstand E_h dieses punktförmig gedachten Himmelskörpers M_h vom Theilchen m die Formel:

$$(\alpha.) \quad \frac{1}{E_h} = \frac{1}{R_h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R_h} \right)^n P_n(\cos \gamma_h),$$

wo γ_h die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen (u, φ) und (u_h, φ_h) vorstellt. Gleichzeitig erhält man für die Grösse U_h (10.)

$$U_h = \frac{xx_h + yy_h + zz_h}{R_h^3}$$

den Werth:

$$(\beta.) \quad U_h = \frac{RR_h \cos \gamma_h}{R_h^3} = \frac{1}{R_h} \left(\frac{R}{R_h} \right)^1 P_1(\cos \gamma_h).$$

Aus $(\alpha.)$, $(\beta.)$ folgt durch Subtraction, und indem man noch mit kM_h multiplicirt:

$$(\gamma.) \quad kM_h \left(\frac{1}{R_h} - U_h \right) = \frac{kM_h}{R_h} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{R_h} \right)^n P_n(\cos \gamma_h) \right].$$

Hier kann man, weil bei Berechnung der Störungsglieder nur die erste Annäherung zu erstreben ist, die dritte und die höheren Potenzen des Bruches $\frac{R}{R_h}$ gegen die zweite Potenz desselben vernachlässigen, und überdies R durch A ersetzen; so dass man also erhält:

$$(18.) \quad k \mathfrak{S} M_h \left(\frac{1}{R_h} - U_h \right) = k \mathfrak{S} \frac{M_h}{R_h} \left[1 + \left(\frac{A}{R_h} \right)^2 P_2(\cos \gamma_h) \right].$$

Denken wir uns jetzt die Werthe (16.), (17.), (18.) in die *Oberflächenbedingung* (13.) wirklich eingesetzt, so präsentirt sich diese Bedingung als eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Entwicklung, welche beständig = Const. sein soll. Demgemäss müssen in dieser Bedingungsgleichung auf beiden Seiten die Kugelfunctionen 0^{ter}, 1^{ter}, 2^{ter}, u. s. w. Ordnung *einzel*n einander gleich sein. Wir gelangen daher zu folgenden Formeln:

$$\frac{4\pi q k A^2}{3} (1 + 2\alpha Y_0) + \frac{\varepsilon A^2}{3} + k \mathfrak{S} \frac{M_h}{R_h} = \text{Const.},$$

$$0 = 0,$$

$$\frac{4\pi q k A^2}{3} \frac{2\alpha}{5} Y_2(u, \varphi) + \frac{\varepsilon A^2}{3} P_2(u) - k \mathfrak{S} \frac{M_h A^2}{R_h} P_2(\cos \gamma_h) = 0,$$

$$Y_3(u, \varphi) = 0,$$

$$Y_4(u, \varphi) = 0,$$

etc. etc.;

und hieraus erhalten wir, unter Rücksichtnahme auf die bekannte Relation $M = \frac{4\pi q}{3} A^3$ [(3.) pg. 88], für die Functionen Y_2 , Y_3 , Y_4 , etc. folgende Werthe:

$$(19.) \quad \begin{cases} Y_2(u, \varphi) = -\frac{5\varepsilon}{8\pi q k \alpha} P_2(u) + \frac{5}{2\alpha} \mathfrak{S} \frac{M_h}{M} \left(\frac{A}{R_h} \right)^3 P_2(\cos \gamma_h), \\ Y_3(u, \varphi) = Y_4(u, \varphi) = \dots = 0; \end{cases}$$

ohne dabei aber Aufschluss zu gewinnen über die Werthe von Y_0 und $Y_1(\mu, \varphi)$. Mit Bezug hierauf sei bemerkt, dass Y_0 eine *unbekannte Constante* ist, und dass

$$(19a.) \quad Y_1(\mu, \varphi) = A\mu + B\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi + \Gamma\sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi$$

ist [vgl. (2.) pg. 76 und (3.) pg. 70], wo A, B, Γ *unbekannte Constanten* vorstellen. Und überdies sei bemerkt, dass die Entwicklung der Function $f(\mu, \varphi)$, (15.), zufolge der Formeln (19.), sich auf *drei* Glieder reducirt:

$$(20.) \quad f(\mu, \varphi) = Y_0 + Y_1(\mu, \varphi) + Y_2(\mu, \varphi).$$

Wollen wir nun die *Gleichung* (14.) *der Oberfläche der rotirenden Flüssigkeit* wirklich bilden, so haben wir in jene Gleichung für $f(\mu, \varphi)$ den Werth (20.), und dabei zugleich für die Y 's die Werthe (19.), (19a.) eintreten zu lassen. Wir werden zeigen, dass jene Gleichung durch diese Substitution in eine Gleichung sich verwandelt, *die in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten vom zweiten Grade ist*, also zeigen, dass die in Rede stehende Oberfläche ein *Ellipsoid* ist.

Zuvörderst ist jene Gleichung (14.) der Flüssigkeitsoberfläche, falls man sie zur $(-2)^{\text{ten}}$ Potenz erhebt, und dabei beachtet, dass α^2 vernachlässigt werden soll, in die Gestalt versetzbar:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1 - 2\alpha f(\mu, \varphi)}{A^2},$$

d. i. in die Gestalt:

$$A^2 = R^2 [1 - 2\alpha f(\mu, \varphi)],$$

also, mit Rücksicht auf (20.), auch so darstellbar:

$$A^2 = R^2 - [2\alpha R^2] Y_0 - [2\alpha R] R Y_1(\mu, \varphi) - 2\alpha R^2 Y_2(\mu, \varphi).$$

Hier können wir, weil α^2 zu vernachlässigen ist, die in den eckigen Klammern enthaltenen Grössen durch $2\alpha A^2$ resp. durch $2\alpha A$ ersetzen, wie solches aus (14.) sofort folgt. Thun wir aber dies, und geben wir zugleich den einzelnen Gliedern eine etwas andere Reihenfolge, so erhalten wir die *Gleichung der Flüssigkeitsoberfläche* in folgender Gestalt:

$$(21.) \quad (R^2 - 2\alpha R^2 Y_2(\mu, \varphi)) - (2\alpha A R Y_1(\mu, \varphi)) = A^2 (1 + 2\alpha Y_0),$$

d. i. in der Gestalt:

$$(22.) \quad \mathfrak{U} - \mathfrak{B} = A^2 (1 + 2\alpha Y_0),$$

wo alsdann \mathfrak{U} und \mathfrak{B} , wie mit Rücksicht auf (19.), (19a.) sich leicht ergibt, die Werthe haben:

$$(23.) \quad \begin{aligned} \mathfrak{U} &= R^2 + \frac{5\varepsilon}{4\pi qk} R^2 P_2(\mu) - 5 \mathfrak{S} \frac{M_h}{M} \left(\frac{A}{R_h} \right)^3 R^2 P_2(\cos \gamma_h), \\ \mathfrak{B} &= 2\alpha A [A R \mu + B R \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi + \Gamma R \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi]. \end{aligned}$$

Hier repräsentiren (R, μ, φ) die Polarcoordinaten irgend eines Oberflächenpunktes der Flüssigkeit, und (R_h, μ_h, φ_h) die Polarcoordinaten des Himmelskörpers M_h . Sind also (x, y, z) und (x_h, y_h, z_h) die entsprechenden rechtwinkligen Coordinaten, so finden die Relationen statt:

$$\begin{aligned} x &= R\mu, & R^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ (\alpha.) \quad y &= R\sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, & \cos \gamma_h &= \frac{xx_h + yy_h + zz_h}{RR_h}, \\ z &= R\sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \end{aligned}$$

wo γ_h die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen (μ, φ) und (μ_h, φ_h) vorstellt. Ferner ist [vgl. (10.) p. 29]:

$$\begin{aligned} P_2(\mu) &= \frac{3}{2} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right), \\ P_2(\cos \gamma_h) &= \frac{3}{2} \left(\cos^2 \gamma_h - \frac{1}{3} \right), \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf $(\alpha.)$:

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ (\beta.) \quad R^2 P_2(\mu) &= \frac{3}{2} \left[x^2 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right) \right], \\ R^2 P_2(\cos \gamma_h) &= \frac{3}{2} \left[\left(\frac{xx_h + yy_h + zz_h}{R_h} \right)^2 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mittelst dieser Formeln $(\alpha.)$, $(\beta.)$ gewinnen die Ausdrücke \mathfrak{U} , \mathfrak{B} (23.) folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{15\varepsilon}{8\pi qh} \left[x^2 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right) \right] \\ (24.) \quad &- \frac{15}{2} \mathfrak{S} \frac{M_h}{M} \left(\frac{A}{R_h} \right)^3 \left[\left(\frac{xx_h + yy_h + zz_h}{R_h} \right)^2 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{B} = 2\alpha A (Ax + By + \Gamma z);$$

demgemäss ist \mathfrak{U} eine homogene Function zweiten Grades von x, y, z , und \mathfrak{B} eine homogene Function ersten Grades von x, y, z . Folglich ist die durch die Formel (22.) dargestellte Flüssigkeitsoberfläche ein Ellipsoid.

Durch eine parallele Verschiebung des Axensystems (x, y, z) kann man den linearen Term \mathfrak{B} zum Verschwinden bringen, der Gleichung des Ellipsoids (22.) also die Gestalt verleihen:

$$(25.) \quad \mathfrak{U} = K,$$

wo \mathfrak{U} dieselbe homogene Function zweiten Grades bezeichnet, wie bisher, während K eine Constante vorstellt. Substituirt man für \mathfrak{U} seine

in (24.) angegebene Bedeutung, so erhält man also schliesslich die *Oberfläche des Flüssigkeitsellipsoids* in folgender Darstellung:

$$(26.) \left\{ \begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{15\epsilon}{8\pi qk} \left[x^2 - \frac{(y^2 + z^2)}{3} \right] \\ & - \frac{15}{2} \mathfrak{S} \frac{M_h}{M} \left(\frac{A}{R_h} \right)^3 \left[\left(\frac{xx_h + yy_h + zz_h}{R_h} \right)^2 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right) \right] \end{aligned} \right\} = K.$$

Aus dieser Formel*) erkennt man, dass die von der Rotationsbewegung und von den Himmelskörpern M_1, M_2, M_3, \dots herrührenden Anschwellungen der Flüssigkeit sich gewissermassen *superponiren*, und dass jede solche Anschwellung, für sich *allein* betrachtet, ebenfalls von *ellipsoidischer* Form ist. Zugleich bemerkt man, dass die der Rotationsbewegung entsprechende Anschwellung durch ein *abgeplattetes Umdrehungsellipsoid* repräsentirt ist, dessen Axe mit der Rotationsaxe der Flüssigkeit zusammenfällt, während andererseits die von irgend einem Himmelskörper M_h herrührende Anschwellung durch ein *gestrecktes Umdrehungsellipsoid* sich darstellt, dessen Axe nach M_h gerichtet ist.

§ 9.

Vereinfachung der in § 6 angestellten Untersuchungen**).

Im § 6 ist auf pg. 101–104 der Werth des Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{q=R}$$

berechnet worden. Die dort zur Ausführung dieser Rechnung benutzte Methode kann aber ersetzt werden durch eine bei Weitem kürzere und einfachere Methode, welche auf der Anwendung des *Laplace'schen Sphäroidsatzes* beruht.

Zufolge jenes Satzes [vgl. (9.) pg. 52] ist nämlich:

$$(1.) \quad 2A \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{q=R} = - (V)_{q=R} - \frac{4\pi q A^2}{3};$$

wodurch der Oberflächenwerth des Ausdrucks $\frac{\partial V}{\partial q}$ auf den von V selber reducirt wird. Letzterer aber war bereits ermittelt worden. In der That hatten wir in (12.) pg. 93 gefunden, dass der Oberflächenwerth von V folgendermassen lautet:

*) Setzt man die M_h sämmtlich $= 0$, so verwandelt sich die Formel (26.) in die früher gefundene Formel (20.) pg. 97, wobei Rücksicht zu nehmen ist auf (18.) pg. 96.

**) Der Herausgeber erlaubt sich, diese Vereinfachung, zu welcher derselbe erst während des Druckes gelangt ist, hier wenigstens *nachträglich* mitzutheilen.

$$V = \frac{4\pi q A^2}{3} \left\{ 1 - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-1)}{2n+1} Y_n(\mu, \varphi) \right\}.$$

Auch hatten wir damals, in (14.), (15.) pg. 94 und 96, gefunden, dass die hier auftretenden Y 's sämmtlich $= 0$ sind, mit alleiniger Ausnahme von Y_2 ; so dass wir schreiben können:

$$V = \frac{4\pi q A^2}{3} \left[1 - \frac{2\alpha}{5} Y_2(\mu, \varphi) \right].$$

Substituiren wir nun diesen Oberflächenwerth von V in der rechten Seite der Formel (1.), — woselbst dieser nämliche Werth mit $(V)_{\varrho=R}$ bezeichnet worden ist —, so erhalten wir:

$$(2.) \quad 2A \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=R} = - \frac{8\pi q A^2}{3} \left[1 - \frac{\alpha}{5} Y_2(\mu, \varphi) \right].$$

Hieraus folgt, falls wir für $Y_2(\mu, \varphi)$ den schon früher, in (19.) pg. 96, erhaltenen Werth: $-\frac{\delta}{\alpha} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right)$ substituiren:

$$(3.) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=R} = - \frac{4\pi q A}{3} \left[1 + \frac{\delta}{5} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \right].$$

Dies aber ist *dasselbe* Resultat, zu welchem wir in § 6, nämlich in (14.) pg. 104, auf ganz anderem und viel mühsamerem Wege gelangten.

Sechstes Capitel.

Ueber die Gauss'sche Theorie des Erdmagnetismus*).

Wir werden zuvörderst die analytischen Ausdrücke für die drei Componenten S , M , P des Erdmagnetismus entwickeln. Dabei mag S die *senkrechte* (d. i. vertikale) Componente sein, während M und P die beiden *horizontalen* dem *Meridian* und dem *Paralleltkreis* entsprechenden Componenten vorstellen sollen. Auf Grund der analytischen Ausdrücke dieser drei Componenten werden wir sodann zeigen, dass, wenn S für sämtliche Punkte der Erdoberfläche bekannt ist, diese Kenntniss von S bereits ausreichend ist zur Berechnung von M und P . Ist andererseits M bekannt, während S und P unbekannt sind, so wird, wie wir zeigen werden, diese Kenntniss von M ausreichend sein zur Berechnung von S und P .

Zu diesen Sätzen, die wesentlich darauf beruhen, dass die in Rede stehenden Kräfte ein *Potential* besitzen, werden noch andere Ergebnisse hinzutreten, die derselben Quelle entstammen, und nicht weniger merkwürdig sind.

Uebrigens wird bei Ableitung all' dieser Sätze vorausgesetzt sein, dass der eigentliche Sitz der erdmagnetischen Kraft wirklich *innerhalb* der Erde sich befindet. Schliesslich werden wir zur Beantwortung der Frage übergehen, in wie weit eine solche Voraussetzung *gerechtfertigt* ist. Und zwar werden wir zeigen, dass man auf diese Frage in der That Auskunft zu geben vermag, nämlich zeigen, dass man auf Grund eines zweckmässig eingerichteten Beobachtungsmaterials dereinst darüber zu entscheiden im Stande sein wird, ob der Sitz der sogenannten erdmagnetischen Kraft wirklich *innerhalb* der Erde, oder aber *ausserhalb* der Erde, oder vielleicht *theils innerhalb, theils ausserhalb* derselben zu suchen ist.

*) Gauss: Allg. Theorie des Erdmagnetismus. 1838. (Gauss' ges. Werke Bd. 5.)

§ 1.

Die analytischen Ausdrücke für die Componenten der erdmagnetischen Kraft, unter der Voraussetzung, dass der Sitz dieser Kraft wirklich innerhalb der Erde sich befindet.

Wir besitzen viele, aber sehr verschieden zuverlässige Beobachtungen über den Erdmagnetismus, deren Resultate man dadurch zu veranschaulichen gesucht hat, dass man auf der Erdoberfläche die *isogonen*, *isoklinen* und *isodynamischen* Curven construirte.

Die ersten Versuche zu einer Theorie des Erdmagnetismus bestanden darin, dass man innerhalb der Erde ein Paar magnetischer Pole annahm, und diesen Polen eine solche Lage zuzuertheilen suchte, dass hieraus die beobachteten Erscheinungen sich erklären liessen. Dabei hatte man alsdann zu verfügen über 7 willkürliche Constanten, von denen 6 die Lage der Pole ausdrückten, und eine die Intensität der Pole bestimmte. Euler fand jedoch, dass ein derartiges Verfahren, wie man über jene 7 Constanten auch disponiren mag, unzureichend sei zur Erklärung der beobachteten Erscheinungen, und nahm daher zwei Polpaare an, wodurch den Erscheinungen schon besser entsprochen werden konnte. — Man darf sich aber nicht verführen lassen, in diesen Annahmen mehr zu sehen, als die willkürliche Disposition über 7, respective 14 Constanten. Diese Art der Erklärung hat überdies auch noch den Nachtheil, dass die Rechnung sehr unbequem ist, weil zur Durchführung derselben keine allgemeine Methode sich darbietet. In der That ist auch die Durchführung einer solchen Rechnung, nach Euler, nur noch einmal, und zwar von Hansteen unternommen worden, in seinem berühmten Werke über den Erdmagnetismus.

Wir nehmen zunächst an, der Sitz der erdmagnetischen Kräfte liege innerhalb der Erde selbst, -- eine Annahme, zu deren Prüfung sich später die geeigneten Mittel ergeben werden. Ueber die Vertheilung des Magnetismus in der Erde machen wir vorläufig gar keine Annahme, betrachten vielmehr diese Vertheilung als irgend eine unbekannte (continuirliche oder discontinuirliche) Function des Ortes.

Bezeichnet m irgend einen an der Erdoberfläche befindlichen magnetischen Massenpunkt (z. B. irgend einen Massenpunkt derjenigen magnetischen Materie, die in einer Compassnadel enthalten ist), so wird das Potential des Erdmagnetismus auf diesen Punkt m den Werth haben:

$$(1.) \quad V = \sum \frac{m'}{E};$$

dabei ist die Summation ausgedehnt zu denken über alle innerhalb der Erde befindlichen magnetischen Massenpunkte m' , und unter E die

Entfernung zwischen m' und m zu verstehen. Sind nun (ϱ, μ, φ) und $(\varrho', \mu', \varphi')$ die Polarcordinaten von m und m' in Bezug auf ein Polarcordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Centrum der Erde liegt, so ist:

$$\varrho' < A < \varrho,$$

wo A den *Erdradius* vorstellt*). Demgemäss ergibt sich [vgl. pg. 46] die Entwicklung:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{\varrho} + \frac{\varrho' P_1(\cos \gamma)}{\varrho^2} + \frac{\varrho'^2 P_2(\cos \gamma)}{\varrho^3} + \dots,$$

wo γ die Neigung von ϱ gegen ϱ' repräsentirt. Substituirt man diese Entwicklung in (1.), und beachtet, dass $\Sigma m' = 0$ ist**), so erhält man:

$$(2.) \quad V = \frac{\Sigma[m' \varrho' P_1(\cos \gamma)]}{\varrho^2} + \frac{\Sigma[m' \varrho'^2 P_2(\cos \gamma)]}{\varrho^3} + \dots$$

Die hier in den Zählern auftretenden Summen sind, wie man leicht erkennt [vgl. z. B. (19.) pg. 49], ebenso wie $P_n(\cos \gamma)$ selber, Kugelfunctionen der Argumente μ, φ , und mögen demgemäss mit

$$Y_1(\mu, \varphi), \quad Y_2(\mu, \varphi), \quad \text{etc.},$$

oder besser mit

$$A^3 Y_1(\mu, \varphi), \quad A^4 Y_2(\mu, \varphi), \quad \text{etc.}$$

bezeichnet werden. Es mag also gesetzt werden:

$$\Sigma[m' \varrho'^n P_n(\cos \gamma)] = A^{n+2} Y_n(\mu, \varphi).$$

Alsdann geht die Formel (2.) über in:

$$(3.) \quad V = \frac{A^3}{\varrho^2} Y_1(\mu, \varphi) + \frac{A^4}{\varrho^3} Y_2(\mu, \varphi) \dots + \frac{A^{n+2}}{\varrho^{n+1}} Y_n(\mu, \varphi) + \dots,$$

wofür, unter Fortlassung der Argumente μ, φ , einfacher geschrieben werden kann:

$$(3a.) \quad V = \frac{A^3}{\varrho^2} Y_1 + \frac{A^4}{\varrho^3} Y_2 \dots + \frac{A^{n+2}}{\varrho^{n+1}} Y_n + \dots$$

Die Vertheilung der magnetischen Materie innerhalb der Erde betrachten wir als *unbekannt*. Demzufolge sind z. B. die hier eingeführten Y s *unbekannte* Kugelfunctionen der Argumente μ, φ . Wie dem auch sei, jedenfalls werden wir aus (3.) die zu Anfang dieses Capitels

*) Bei der gegenwärtigen Betrachtung soll nämlich die Erde geradezu als eine *Kugel* angesehen werden; und der Radius dieser Kugel soll A heissen.

**) Wir schliessen uns hier der bekannten Annahme an, dass in jedem Körper, also z. B. auch in der Erde, ebensoviel *positiv*-, wie *negativ*-magnetische Materie enthalten ist.

genannten Componenten S, M, P abzuleiten im Stande sein, indem wir uns dabei der Formeln (π .) pg. 25 bedienen.

Beachtet man, dass der dortige Factor f im gegenwärtigen Falle $= 1$ ist, und setzt man überdies die Masse m des sollicitirten Punktes $m(\varrho, \mu, \varphi)$ ebenfalls $= 1$, so ergibt sich aus jenen Formeln:

$$\begin{aligned} M &= R \cos(R, d\sigma_3) = + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \mu}, \\ (4.) \quad P &= R \cos(R, d\sigma_\varphi) = - \frac{1}{\varrho \sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ S &= R \cos(R, d\sigma_\varrho) = - \frac{\partial V}{\partial \varrho}, \end{aligned}$$

wo z. B. S in der Richtung ϱ , d. i. vertikal nach *oben* gerechnet ist. Substituirt man hier für V den Werth (3a.), und beachtet man, dass der sollicitirte Punkt (ϱ, μ, φ) *dicht an der Erdoberfläche* liegen, mithin ϱ nur wenig grösser als A sein soll, und dass also, nach Ausführung der Differentiationen, ϱ ohne merklichen Fehler $= A$ gesetzt werden darf, so erhält man:

$$\begin{aligned} (5.) \quad M &= \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + \dots), \\ (6.) \quad P &= - \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + \dots), \\ (7.) \quad S &= + 2 Y_1 + 3 Y_2 + 4 Y_3 + \dots + (n+1) Y_n + \dots \end{aligned}$$

Die beiden horizontalen Componenten M und P lassen sich vereinigen zu einer *einzigen* horizontalen Componente H . Und zwar erhält man für H , ferner für die *Declination* δ und für die *Inclination* j die Formeln:

$$(8.) \quad H = \sqrt{M^2 + P^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{P}{M}, \quad \operatorname{tg} j = \frac{S}{H}.$$

Die drei Grössen H, δ, j sind am unmittelbarsten der Beobachtung zugänglich. Doch ist ihr Zusammenhang mit dem eigentlichen Kern der Theorie, nämlich mit dem Potential V ein so complicirter, dass es von vornherein unpraktisch erscheinen muss, dieselben als Grundlagen der Rechnung einzuführen. Vielmehr erscheint es rathsam, aus den beobachteten Werthen von H, δ, j zuvörderst die Werthe von M, P, S abzuleiten, und sodann diese letztern zur eigentlichen Basis der Rechnung zu nehmen.

§ 2.

Fortsetzung. Der gegenseitige Zusammenhang zwischen den drei Componenten des Erdmagnetismus.

Nehmen wir an, es sei S für alle Punkte der Erdoberfläche bekannt, und es sei gelungen, dieses S in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe zu entwickeln:

$$(9.) \quad S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 \cdots + S_n + \cdots,$$

wo S_n eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung vorstellt. Alsdann müssen, wie aus dem Theorem pg. 59 und den Zusätzen pg. 60 sich ergibt, die Entwicklungen (9.) und (7.) Glied für Glied untereinander identisch sein; woraus folgt:

$$(10a.) \quad S_0 = \text{Null, und:}$$

$$(10b.) \quad Y_1 = \frac{1}{2} S_1, \quad Y_2 = \frac{1}{3} S_2, \quad \dots \quad Y_n = \frac{1}{n+1} S_n, \quad \dots$$

Nachdem in solcher Weise die Y 's gefunden sind, können jetzt, auf Grund dieser Y 's, mittelst der Formeln (5.), (6.) sofort auch die Werthe der Componenten M und P berechnet werden; so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Erster Satz. — Ist S für alle Punkte der Erdoberfläche bekannt, so wird diese Kenntniss von S bereits ausreichend sein zur Berechnung von M und P .

Wir gehen über zu einer andern Betrachtung, die sich ebenfalls den Formeln (5.), (6.), (7.) anschliesst. In jenen Formeln repräsentiren M, P, S die Werthe der drei Componenten der erdmagnetischen Kraft an der Erdoberfläche, also Functionen von μ, φ . Demgemäss folgt aus (5.):

$$\int_{-1}^{\mu} \frac{M \partial \mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots) - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots)_{\mu=-1}.$$

Der hier auftretende letzte Term

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots)_{\mu=-1}$$

enthält diejenigen Specialwerthe, welche die Y 's für $\mu = -1$ annehmen, und kann also nur noch von φ abhängig sein. Nun sind aber die Y 's für $\mu = -1$ nicht nur von μ , sondern auch von φ unabhängig [vgl. die zweite Bemkg. pg. 77]. Demgemäss ist also jener letzte Term unabhängig von μ und φ , d. h. eine Constante. Wir erhalten daher:

$$(11.) \quad \int_{-1}^{\mu} \frac{M \partial \mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = (\text{Const.}) + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots$$

Nehmen wir nun an, es sei die Meridiancomponente M für alle Punkte der Erdoberfläche bekannt, es sei also M eine bekannte Function von μ , φ . Alsdann gilt offenbar Gleiches auch von dem in der letzten Formel befindlichen Integral, mithin*) auch von den daselbst vorhandenen Y 's. Sind in solcher Weise aber die Y 's gefunden, so kann man aus ihnen sofort, mittelst der Formeln (6.), (7.), auch P und S berechnen. Also folgender

Zweiter Satz. — Ist M für alle Punkte der Erdoberfläche bekannt, so kann man sofort auch die Werthe von P und S finden.

Wir gehen über zu einer dritten Betrachtung über die Formeln (5.), (6.), (7.). Aus (6.) folgt sofort:

$$-\sqrt{1-\mu^2} \int_0^\varphi P \partial \varphi = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots) - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots)_{\varphi=0}.$$

Der hier auftretende Term

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots)_{\varphi=0}$$

ist offenbar unabhängig von φ , mithin nur noch eine Function von μ . Er mag demgemäss mit $F(\mu)$ bezeichnet werden. Alsdann erhält man also:

$$-\sqrt{1-\mu^2} \int_0^\varphi P \partial \varphi = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots) - F(\mu).$$

Substituirt man aber den hieraus für $(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots)$ sich ergebenden Werth in (5.), so folgt sofort:

$$M = \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ F(\mu) - \sqrt{1-\mu^2} \int_0^\varphi P \partial \varphi \right\}.$$

Denkt man sich diese Formel successive für zwei Stellen (μ, φ) und (μ, φ') ein und desselben Parallelkreises (μ) gebildet, und die so entstehenden beiden Gleichungen von einander subtrahirt, so erhält man:

$$(12.) \quad M(\mu, \varphi) - M(\mu, \varphi') = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \sqrt{1-\mu^2} \int_{\varphi'}^\varphi P \partial \varphi \right\}.$$

Nimmt man nun an, es sei P für alle Punkte der Erdoberfläche bekannt, so wird die rechte Seite der letzten Formel ebenfalls bekannt sein, folglich auch die linke Seite. Also folgender

Dritter Satz. — Ist P für alle Punkte der Erdoberfläche bekannt, und ist überdies M für alle Punkte eines bestimmten Meridians (φ') bekannt, so wird man M für sämtliche Punkte der ganzen Erdoberfläche, mithin [zufolge des zweiten Satzes] auch S zu berechnen im Stande sein.

*) Vgl. das Theorem pg. 59, und die Zusätze pg. 60.

§ 3.

Fortsetzung. — Ueber die Aenderungen, welche die drei Componenten des Erdmagnetismus erfahren bei einer Erhebung über die Erdoberfläche.

Vierter Satz. — Sind H, δ, j , mithin auch M, P, S für irgend ein Gebiet der Erdoberfläche bekannt als Functionen der geographischen Breite und Länge, so kann man hieraus die Aenderungen berechnen, welche die genannten Grössen in jenem Gebiete erfahren bei einer Erhebung über die Erdoberfläche.

Dieser Satz, den wir sogleich beweisen werden, ist von besonderer Wichtigkeit. Denn auf ihm beruht die Möglichkeit, die magnetische Wirkung einer Gebirgsmasse zu bestimmen. Denkt man sich nämlich H, δ, j oder (was dasselbe ist) M, P, S in der Ebene zu beiden Seiten des Gebirges, und in solcher Entfernung vom Gebirge, dass die Gebirgsmasse auf diese Grössen ohne Einfluss ist, als Functionen der geographischen Breite und Länge bestimmt, so kann man hieraus zuvörderst durch Interpolation diejenigen Werthe ableiten, welche diese Functionen in jener Ebene im Raume des Gebirges besitzen würden, falls die Gebirgsmasse gar nicht vorhanden wäre. Aus den in solcher Weise construirten Functionen kann man sodann aber, zufolge des anfangs genannten (noch unbewiesenen) Satzes, diejenigen Werthe berechnen, welche M, P, S, H, δ, j auf der Höhe des Gebirges besitzen würden, falls die Gebirgsmasse nicht vorhanden wäre. Der Unterschied dieser theoretisch berechneten Werthe, gegenüber den auf der Höhe des Gebirges wirklich beobachteten Werthen, wird alsdann herrühren von der Einwirkung des Gebirges, mithin anwendbar sein zur näheren Bestimmung jener Einwirkung.

Da bei den bisherigen Beobachtungen, die im Kaukasus, den Pyrenäen und den Alpen angestellt sind, der Einfluss der Gebirgsmasse selber nicht berücksichtigt worden ist, so hat man unter einander stark abweichende Resultate über die Abhängigkeit der magnetischen Erscheinungen von der Erhebung über das Meeresnivean erhalten. Es wäre vielleicht eine lohnende Arbeit, die in den Pyrenäen angestellten Beobachtungen nach Maassgabe der soeben gemachten Andeutungen näher zu discutiren. (F. N. 1856.)

Der Beweis des zu Anfang dieses Paragraphs genannten Satzes beruht auf den Formeln (4.):

$$(A.) \quad \frac{\partial V}{\partial \mu} = \frac{e}{\sqrt{1 - \mu^2}} M,$$

$$(B.) \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = - e \sqrt{1 - \mu^2} P,$$

$$(C.) \quad \frac{\partial V}{\partial e} = - S,$$

sowie auf der für V geltenden Differentialgleichung $\Delta V = 0$, d. i.:

$$(D.) \quad \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho^2 \frac{\partial V}{\partial \varrho} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0,$$

[vgl. pg. 9 und pg. 23]. Differenzirt man nämlich die Formeln (A.), (C.) respective nach ϱ , μ , und subtrahirt sodann dieselben von einander, so folgt:

$$(\alpha.) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\varrho}{\sqrt{1 - \mu^2}} M \right) + \frac{\partial S}{\partial \mu}.$$

Und in ähnlicher Weise folgt aus (B.), (C.) durch Differentiation nach ϱ , φ :

$$(\beta.) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \sqrt{1 - \mu^2} P) - \frac{\partial S}{\partial \varphi}.$$

Substituirt man ferner in (D.) für $\frac{\partial V}{\partial \mu}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$ die in (A.), (B.), (C.) angegebenen Werthe, so folgt:

$$(\gamma.) \quad - \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^2 S) + \frac{\partial}{\partial \mu} (\varrho \sqrt{1 - \mu^2} M) - \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0.$$

Diese Formeln ($\alpha.$), ($\beta.$), ($\gamma.$) kann man aber offenbar auch so schreiben:

$$\begin{aligned} M + \varrho \frac{\partial M}{\partial \varrho} &= - \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial S}{\partial \mu}, \\ P + \varrho \frac{\partial P}{\partial \varrho} &= + \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \\ 2\varrho S + \varrho^2 \frac{\partial S}{\partial \varrho} &= \varrho \frac{\partial}{\partial \mu} (\sqrt{1 - \mu^2} M) - \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

oder auch so:

$$(13.) \quad \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial \varrho} = - \frac{M}{\varrho} - \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\varrho} \frac{\partial S}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial P}{\partial \varrho} = - \frac{P}{\varrho} + \frac{1}{\varrho \sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial S}{\partial \varrho} = - \frac{2S}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \mu} (\sqrt{1 - \mu^2} M) - \frac{1}{\varrho \sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial P}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Sind nun M , P , S für irgend ein Gebiet der Erdoberfläche *bekannte* Functionen der geographischen Breite und Länge, d. i. *bekannte* Functionen von μ , φ , so kann man, mittelst dieser Formeln (13.), sofort die diesem Gebiet entsprechenden Werthe von $\frac{\partial M}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial P}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial S}{\partial \varrho}$ berechnen.

Und hieraus ergeben sich dann ferner, mittelst der Formeln (8.), auch die Werthe von $\frac{\partial H}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial \delta}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial j}{\partial \varrho}$. — Hiermit ist der zu Anfang dieses Paragraphs aufgestellte Satz bewiesen.

§ 4.

Ueber die Entscheidung der Frage, ob der Sitz der erdmagnetischen Kraft innerhalb oder ausserhalb der Erde zu suchen ist.

Wir haben bis jetzt angenommen, der Sitz der erdmagnetischen Kraft sei wirklich *innerhalb* der Erde. Um die Richtigkeit dieser Annahme zu prüfen, machen wir jetzt die entgegengesetzte Hypothese, dass der Sitz jener Kraft *ausserhalb* der Erde sich befindet. Alsdann erhält man, wie leicht zu übersehen ist, an Stelle der Reihenentwicklung (2.), folgende:

$$V = \sum \frac{m'}{\varrho'} + \varrho \sum \frac{m' P_1 (\cos \gamma)}{\varrho'^2} + \varrho^2 \sum \frac{m' P_2 (\cos \gamma)}{\varrho'^3} + \dots$$

Beachtet man nun, dass hier das *erste* Glied rechts einen *constanten* d. h. von ϱ , μ , φ unabhängigen Werth hat, und setzt man überdies:

$$\sum \frac{m' P_n (\cos \gamma)}{\varrho'^{n+1}} = \frac{1}{A^{n-1}} Z_n(\mu, \varphi) = \frac{1}{A^{n-1}} Z_n,$$

wo A den Erdradius, und Z_n eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung vorstellt, so erhält man:

$$(14.) \quad V = (\text{Const.}) + \varrho Z_1 + \frac{\varrho^2}{A} Z_2 + \frac{\varrho^3}{A^2} Z_3 + \dots$$

Und hieraus ergeben sich, mittelst der Formeln (4.), für M , P , S die Werthe:

$$(15.) \quad M = \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n + \dots),$$

$$(16.) \quad P = - \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n + \dots),$$

$$(17.) \quad S = - (Z_1 + 2Z_2 + 3Z_3 + \dots + nZ_n + \dots).$$

Vergleicht man diese Werthe (15.), (16.), (17.) mit den früheren Werthen (5.), (6.), (7.), so bemerkt man *volle Uebereinstimmung bei M, P, hingegen wesentliche Verschiedenheit mit Bezug auf S.*

Ebenso wie sich damals [in (11.)] ergab:

$$\int_{-1}^{\mu} \frac{M d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} = (\text{Const.}) + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots,$$

ebenso wird sich also gegenwärtig ergeben:

$$\int_{-1}^{\mu} \frac{M d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} = (\text{Const.}) + Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$$

Denkt man sich also das M als eine durch Beobachtungen bestimmte Function von μ , φ , so erhält man für die Z 's *genau dieselben* Werthe,

wie früher für die Y 's. Während aber die Y 's zu den durch die Entwicklung*):

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots$$

sich ergebenden Kugelfunctionen $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ in der Beziehung (10b.) standen:

$$Y_1 = \frac{1}{2} S_1, \quad Y_2 = \frac{1}{3} S_2, \quad Y_3 = \frac{1}{4} S_3, \dots;$$

stehen die gegenwärtigen Z 's zu S_1, S_2, S_3, \dots in folgender Beziehung:

$$Z_1 = -S_1, \quad Z_2 = -\frac{1}{2} S_2, \quad Z_3 = -\frac{1}{3} S_3, \dots$$

wie solches aus (17.) hervorgeht. Diese Verschiedenheit giebt also ein Mittel zur Entscheidung der Frage, ob der Erdmagnetismus *innerhalb* oder *ausserhalb* der Erde seinen Sitz hat, oder ob derselbe — was wohl am wahrscheinlichsten ist — *theils* in inneren, *theils* in äusseren Ursachen seinen Grund hat.

Aller Wahrscheinlichkeit nach wird also dereinst, sobald die Beobachtungen ihrer Zahl und Art nach hinreichend vervollkommenet sind, die Aufgabe an uns herantreten, *jene beiderlei Ursachen von einander zu trennen*. Dies aber kann folgendermassen bewerkstelligt werden.

Existiren wirklich beiderlei Ursachen (innere und äussere), so ist das Potential gleich der *Summe* der beiden früheren Ausdrücke (3a.) und (14.); so dass man also erhält:

$$(18.) \quad V = (\text{Const.}) + \frac{A^3}{q^3} Y_1 + \frac{A^4}{q^3} Y_2 + \frac{A^5}{q^4} Y_3 + \dots \\ + q Z_1 + \frac{q^2}{A} Z_2 + \frac{q^3}{A^2} Z_3 + \dots$$

Hieraus aber ergeben sich, mittelst der in (4.) genannten Formeln:

$$M = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{q} \frac{\partial V}{\partial \mu},$$

$$S = -\frac{1}{\partial q} V,$$

für die Meridiancomponente M und die senkrechte Componente S die Werthe:

$$(19.) \quad M = \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((Y_1 + Z_1) + (Y_2 + Z_2) + (Y_3 + Z_3) + \dots \right),$$

$$(20.) \quad S = (2 Y_1 - Z_1) + (3 Y_2 - 2 Z_2) + (4 Y_3 - 3 Z_3) + \dots$$

Und hieraus folgt weiter [vgl. die Betrachtungen auf pg. 123]:

$$(21.) \quad \int_{-1}^{\mu} \frac{M \partial \mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = (\text{Const.}) + (Y_1 + Z_1) + (Y_2 + Z_2) + (Y_3 + Z_3) + \dots$$

*) In dieser Entwicklung wird (ähnlich wie früher) das Glied S_0 wiederum *fehlen*, wie sich solches aus (17.) sofort ergibt.

Sind nun S und M , auf Grund ausreichender Beobachtungen, für alle Punkte der Erdoberfläche bekannt, mithin die linken Seiten der Formeln (19.), (20.), (21.) bekannte Functionen von μ, φ , so wird man diese Functionen nach Kugelfunctionen zu entwickeln im Stande sein:

$$(22.) \quad S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots,$$

$$(23.) \quad \int_{-1}^{\mu} \frac{M \partial \mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} = (\text{Const.}) + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \dots$$

Zu den in solcher Weise berechneten Kugelfunctionen S_1, S_2, \dots und M_1, M_2, \dots stehen alsdann die unbekannten Y 's und Z 's in folgender Beziehung:

$$(24.) \quad \begin{cases} 2 Y_1 - Z_1 = S_1, \\ 3 Y_2 - 2 Z_2 = S_2, \\ 4 Y_3 - 3 Z_3 = S_3, \\ \text{etc. etc.}, \end{cases} \quad \begin{cases} Y_1 + Z_1 = M_1, \\ Y_2 + Z_2 = M_2, \\ Y_3 + Z_3 = M_3, \\ \text{etc. etc.}; \end{cases}$$

woraus sofort folgt

$$(25.) \quad \begin{cases} 3 Y_1 = S_1 + M_1, \\ 5 Y_2 = S_2 + 2 M_2, \\ 7 Y_3 = S_3 + 3 M_3, \\ \text{etc. etc.} \\ (2n + 1) Y_n = S_n + n M_n, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 Z_1 = 2 M_1 - S_1, \\ 5 Z_2 = 3 M_2 - S_2, \\ 7 Z_3 = 4 M_3 - S_3, \\ \text{etc. etc.} \\ (2n + 1) Z_n = (n + 1) M_n - S_n. \end{cases}$$

Sind also S und M für alle Punkte der Erdoberfläche bekannt, so kann man, mittelst dieser Formeln (25.), die Y 's und Z 's berechnen, und in solcher Weise die vorgelegte Frage entscheiden. Sollte sich z. B. bei dieser Berechnung ergeben, dass die Y 's sämmtlich $= 0$ sind, so würde hieraus folgen, dass die erdmagnetischen Kräfte ihren Sitz nur ausserhalb der Erde haben. U. s. w.

Die bis jetzt angestellten Beobachtungen sind leider zur Berechnung der Y 's und Z 's noch nicht ausreichend. Freilich hat Gauss in seiner grossen und berühmten Abhandlung die Componenten des Erdmagnetismus, auf Grund der angestellten Beobachtungen, wirklich nach Kugelfunctionen entwickelt. Die Mangelhaftigkeit jener Beobachtungen bringt es aber mit sich, dass diese Gauss'schen Formeln kein sicheres Fundament geben zur Berechnung der Y 's und Z 's*).

Die Entscheidung der Frage, ob der Erdmagnetismus in innern oder äussern oder gleichzeitig in beiderlei Ursachen seinen Grund hat,

*) Man vgl. namentlich den Artikel 40 der Gauss'schen Abhandlung: Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus, 1838. (Ges. Werke. Bd. 5.)

ist also der Zukunft vorbehalten*). Da indessen gegenwärtig durch Errichtung fester magnetischer Stationen, namentlich auf Russischem und Englischem Gebiete, die Beobachtungen bedeutend vervielfältigt werden, so steht zu hoffen, dass in einigen Jahren zur Entscheidung der Frage hinreichendes Beobachtungsmaterial vorhanden sein wird. Jedenfalls dürfte es, *vor* Entscheidung dieser Frage, kaum möglich sein, an die Erklärung der (theils periodischen, theils plötzlichen) magnetischen Schwankungen näher heranzutreten.

Bemerkung. — Gauss ging bei seinen soeben genannten Entwicklungen bis zur *vierten* Kugelfunction, diese *inclusive*. Solches erwies sich als ausreichend, da die Rechnung nur innerhalb der Beobachtungsfehler von den Beobachtungen abwich. Gauss hatte demnach

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = (4 + 1)^2 = 25$$

Constanten zu bestimmen; was er, der ein ebenso grosser Rechner wie Mathematiker war, dadurch bewerkstelligte, dass er 25 Gleichungen mit 25 Unbekannten auflöste.

Es giebt indessen eine *allgemeine Methode***), diese Constanten mit leichter Mühe zu berechnen bis zu jeder beliebigen Ordnung der Kugelfunctionen; wobei allerdings vorausgesetzt wird, dass die Beobachtungsorte nach einem gewissen (noch näher anzugebenden) *Gesetze* über die *Erdoberfläche* vertheilt sind. Unter dieser Voraussetzung existirt nämlich ein einfaches *System von Factoren*, mit denen man nur nöthig hat die Gleichungen zu multipliciren, und dann zu addiren, um ohne Weiteres die Constanten zu finden. Dass die Beobachtungsorte genau nach jenem Gesetz auf der Erde vertheilt seien, ist dabei übrigens nicht einmal nothwendig, da man die an den eigentlich verlangten Orten vorhandenen Werthe durch gewöhnliche Interpolation aus den an den benachbarten Orten angestellten Beobachtungen ableiten kann.

Die in Rede stehende Methode, welche im folgenden Capitel ausführlich dargelegt werden soll, ist übrigens anwendbar auf *jede beliebige Art* von Beobachtungen, falls nur dieselben über die ganze *Erdoberfläche* vertheilt sind. Sie wird daher, ausser auf den *Erdmagnetismus*, namentlich auch anwendbar sein auf die *Temperatur der Erdoberfläche*.

*) Vgl. übrigens den Artikel 39 der Gauss'schen Abhandlung.

**) F. Neumann: *Ueber eine neue Eigenschaft der Laplace'schen Ypsilons und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind*. Dieser im Jahre 1838 in Schumacher's Astr. Nachrichten (Bd. 15, S. 313) publicirte Aufsatz ist später von Neum abgedruckt in den Math. Annalen (Bd. 14, S. 567).

Siebentes Capitel.

Neumann's Methode zur Entwicklung einer Function nach Kugelfunctionen auf Grund gegebener Beobachtungen*).

Es sei $f(\mu, \varphi)$ eine unbekannte über die ganze Erdoberfläche sich ausdehnende Function, wie z. B. die Intensität der verticalen Componente des Erdmagnetismus, oder wie z. B. die an der Erdoberfläche vorhandene Temperatur. Die Werthe dieser Function $f(\mu, \varphi)$ seien durch Beobachtung ermittelt in denjenigen $2pq$ Punkten, in denen $2p$ äquidistante Meridiane von irgend welchen q Parallelkreisen geschnitten werden. Wir werden zeigen, wie man, auf Grund dieser $2pq$ Beobachtungsdata, die Function $f(\mu, \varphi)$ nach Kugelfunctionen zu entwickeln im Stande ist bis inclusive zur Kugelfunction p^{ter} Ordnung:

$$f(\mu, \varphi) = Y_0 + Y_1(\mu, \varphi) + Y_2(\mu, \varphi) \cdots + Y_p(\mu, \varphi).$$

Dabei werden wir die Anzahl q der in Rede stehenden Parallelkreise, sowie auch deren Lage zu Anfang *in suspenso* lassen. Später aber werden wir jene Zahl q bald $= (2p + 1)$, bald $= (p + 1)$ setzen, indem wir dabei die Lage der Parallelkreise im erstern Falle willkürlich lassen, im letztern Falle hingegen einem bestimmten Gesetze unterwerfen. Dieses Gesetz wird, wie sogleich bemerkt sein mag, darin bestehen, dass die Parameter $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{p+1}$ jener $(p + 1)$ Parallelkreise identisch sein sollen mit den $(p + 1)$ Wurzeln der Gleichung $P_{p+1}(\mu) = 0$.

Bevor wir auf den Gegenstand selber genauer eingehen, erscheint es zweckmässig, in § 1 und § 2 gewisse Hilfssätze vorausszuschicken, die theils die trigonometrischen Functionen, theils die Kugelfunctionen betreffen.

*) Es soll in diesem Capitel die schon früher erwähnte *F. Neumann'sche Methode* dargelegt werden. Vgl. die Note pg. 130.

§ 1.

Hilfssätze über trigonometrische Functionen.

Erster Satz. — Versteht man unter p eine gegebene Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ..., ferner unter h eine ganz beliebige positive oder negative ganze Zahl, so wird die Summe

$$(1.) \quad \sum_{q=0}^{2p-1} e^{q \frac{h\pi i}{p}} = 2p \quad \text{oder} \quad = 0$$

sein, je nachdem der Quotient $\frac{h}{2p}$ eine ganze oder gebrochene Zahl ist*).

Beweis. — Nimmt man in der bekannten Formel:

$$(1 - \gamma)(1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \dots + \gamma^{2p-1}) = 1 - \gamma^{2p}$$

für γ den Werth:

$$\gamma = e^{i \frac{h\pi i}{p}},$$

so erhält man**):

$$\left(1 - e^{\frac{h\pi i}{p}}\right) \left(\sum_{q=0}^{2p-1} e^{q \frac{h\pi i}{p}}\right) = 0.$$

Von den beiden Factoren links kann aber der *erste* nur dann verschwinden, wenn der Quotient $\frac{h}{2p}$ einen der Werthe:

$$\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

besitzt. Schneidet man diese Möglichkeit also ab, indem man annimmt, jener Quotient $\frac{h}{2p}$ sei eine *gebrochene* Zahl, so muss nothwendiger Weise der *zweite* Factor verschwinden.

Hiermit ist der Satz (1.) für den Fall bewiesen, dass $\frac{h}{2p}$ eine *gebrochene* Zahl vorstellt. — Ist nun aber andererseits $\frac{h}{2p}$ eine *ganze* Zahl, so verwandeln sich alle in der Summe (1.) vorhandenen Exponentialgrößen in 1; so dass also in diesem Falle die Summe selber $= 2p$ wird. — Q. e. d.

*) Dabei sollen e, π, i die gewöhnlichen Bedeutungen haben: $e = 2,718\dots$; $\pi = 3,141\dots$; $i = \sqrt{-1}$.

**) Es wird nämlich in diesem Falle $1 - \gamma^{2p} = 1 - e^{2h\pi i}$ d. i. $= 0$.

Zweiter Satz. — Ist wiederum p eine gegebene Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ..., setzt man ferner

$$(2.) \quad \alpha = \frac{\pi}{p},$$

und versteht man überdies unter j und k irgend zwei Zahlen aus der Reihe

$$(3.) \quad 0, 1, 2, 3, \dots p,$$

so finden die Formeln statt:

		$j = k$		$j \neq k$
		Der gemeinschaftliche Werth von j, k ist $= 0$ oder $= p$.	Der gemeinschaftliche Werth von j, k ist $= 1, 2, 3, \dots (p-1)$.	
(4.)	$\sum_{q=0}^{2p-1} \cos(qj\alpha) \cos(qk\alpha) =$	$2p$	p	0
(5.)	$\sum_{q=0}^{2p-1} \sin(qj\alpha) \sin(qk\alpha) =$	0	p	0
(6.)	$\sum_{q=0}^{2p-1} \cos(qj\alpha) \sin(qk\alpha) =$	0	0	0

Hier gelten, wie durch Ueberschriften angedeutet ist, die Werthe der ersten Verticalreihe, falls $j = k$ und zwar $= 0$ oder $= p$ ist; ferner die der zweiten Verticalreihe, falls $j = k$ und zwar $= 1, 2, 3, \dots (p-1)$ ist; endlich die Werthe der dritten Verticalreihe, falls $j \neq k$ ist.

Beweis. — Es ist: $\cos x = \frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi})$, mithin:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}(e^{(x+y)i} + e^{-(x+y)i} + e^{(x-y)i} + e^{-(x-y)i}).$$

Demgemäss ergibt sich:

$$(f.) \quad \sum_{q=0}^{2p-1} \cos\left(q \frac{j\pi}{p}\right) \left(\cos q \frac{k\pi}{p}\right) = \frac{1}{4} \sum_{q=0}^{2p-1} \left\{ e^{q \frac{(j+k)\pi i}{p}} + e^{-q \frac{(j+k)\pi i}{p}} + e^{q \frac{(j-k)\pi i}{p}} + e^{-q \frac{(j-k)\pi i}{p}} \right\}.$$

Hieraus aber ergibt sich, unter Anwendung des schon bewiesenen ersten Satzes (1.), leicht die Richtigkeit der Formel (4.).

Ist nämlich *erstens*: $j = k$, und zwar $= 0$ oder $= p$, so sind die in (f.) enthaltenen Exponentialgrössen sämmtlich $= 1$; so dass also jener Ausdruck (f.) übergeht in:

$$\frac{1}{4}(2p + 2p + 2p + 2p) = 2p. \text{ — Q. e. d.}$$

Ist *zweitens*: $j = k$, und zwar $= 1, 2, 3, \dots (p-1)$, so wird offenbar:

$$\frac{j+k}{2p} = \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \dots \frac{p-1}{p}, \text{ und } \frac{j-k}{2p} = 0,$$

also nach (h.) auch so:

$$\int_{-1}^{+1} P_{mj}(x) P_{nj}(x) dx;$$

und dieses letzte Integral ist bekanntlich $= \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)}$ oder $= 0$, jenachdem $m = n$ oder $m \neq n$ ist [vgl. (I.), (II.) pg. 79].

Somit ist die Formel (4.) bewiesen. Aus dieser aber ergibt sich für den speciellen Fall $j = 0$ sofort auch die Formel (3.). — *Q. e. d.*

Zweiter Satz. — *Denkt man sich die 2q Constanten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ und a_1, a_2, \dots, a_q bestimmt durch die 2q Gleichungen:*

$$\begin{aligned} a_1 &+ a_2 &+ a_3 &\dots + a_q &= \frac{2}{1} = \int_{-1}^{+1} dx, \\ a_1 \mu_1 &+ a_2 \mu_2 &+ a_3 \mu_3 &\dots + a_q \mu_q &= 0 = \int_{-1}^{+1} x dx, \\ (5.) \quad a_1 \mu_1^2 &+ a_2 \mu_2^2 &+ a_3 \mu_3^2 &\dots + a_q \mu_q^2 &= \frac{2}{3} = \int_{-1}^{+1} x^2 dx, \\ &\dots &\dots &\dots &\dots \\ a_1 \mu_1^{2q-1} &+ a_2 \mu_2^{2q-1} &\dots &+ a_q \mu_q^{2q-1} &= 0 = \int_{-1}^{+1} x^{2q-1} dx, \end{aligned}$$

so werden $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ nichts Anderes sein, als die q Wurzeln der Gleichung

$$(6.) \quad P_q(\mu) = 0.$$

Und demgemäss werden also die Werthe dieser Constanten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ stets reell sein, und zwischen -1 und $+1$ liegen. [Vgl. pg. 44.]

Beweis. — Der Bequemlichkeit willen beschränken wir uns auf den Specialfall $q = 7$. Alsdann lauten die Gleichungen (5.) folgendermassen:

$$\begin{aligned} (a.) \quad a_1 &+ a_2 &+ a_3 &\dots + a_7 &= \frac{2}{1}, \\ a_1 \mu_1 &+ a_2 \mu_2 &+ a_3 \mu_3 &\dots + a_7 \mu_7 &= 0, \\ a_1 \mu_1^2 &+ a_2 \mu_2^2 &+ a_3 \mu_3^2 &\dots + a_7 \mu_7^2 &= \frac{2}{3}, \\ a_1 \mu_1^3 &+ a_2 \mu_2^3 &+ a_3 \mu_3^3 &\dots + a_7 \mu_7^3 &= 0, \\ &\dots &\dots &\dots &\dots \\ a_1 \mu_1^{12} &+ a_2 \mu_2^{12} &+ a_3 \mu_3^{12} &\dots + a_7 \mu_7^{12} &= \frac{2}{13}, \\ a_1 \mu_1^{13} &+ a_2 \mu_2^{13} &+ a_3 \mu_3^{13} &\dots + a_7 \mu_7^{13} &= 0. \end{aligned}$$

Führt man die symmetrischen Functionen ein:

$$\begin{aligned}
 (b.) \quad M_1 &= (-1) (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \dots + \mu_7), \\
 M_2 &= (-1)^2 (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 \dots + \mu_6 \mu_7), \\
 &\dots \dots \dots \\
 M_7 &= (-1)^7 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6 \mu_7,
 \end{aligned}$$

so ist offenbar:

$$(c.) \quad (1 - \mu_1 z) (1 - \mu_2 z) \dots (1 - \mu_7 z) = 1 + M_1 z + M_2 z^2 \dots + M_7 z^7,$$

wo z eine beliebige Variable vorstellt. Ist nun z äusserst klein, so er-
giebt sich:

$$\frac{a_\lambda}{2(1 - \mu_\lambda z)} = \frac{a_\lambda}{2} \left(1 + \mu_\lambda z + \mu_\lambda^2 z^2 + \mu_\lambda^3 z^3 + \dots \text{in inf.} \right).$$

Hieraus folgt durch Summation über $\lambda = 1, 2, 3, \dots, 7$, und mit Rücksicht auf (a.):

$$\begin{aligned}
 (d.) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{1 - \mu_1 z} + \frac{a_2}{1 - \mu_2 z} \dots + \frac{a_7}{1 - \mu_7 z} \right) = \\
 = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} \dots + \frac{z^{12}}{13} + C z^{14} + D z^{15} + E z^{16} + \dots,
 \end{aligned}$$

wo C, D, E, \dots Constanten, d. i. unabhängig von z sind.

Multiplicirt man jetzt die beiden Gleichungen (c.) und (d.) mit einander, die linke mit der linken, die rechte mit der rechten Seite, so erhält man eine Formel von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}
 (e.) \quad A_0 + A_1 z + A_2 z^2 \dots + A_6 z^6 = \\
 = \left\{ (1 + M_1 z + M_2 z^2 \dots + M_7 z^7) \times \right. \\
 \left. \times \left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} \dots + \frac{z^{12}}{13} + C z^{14} + D z^{15} + E z^{16} + \dots \text{in inf.} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

wo die A 's Constanten, d. i. unabhängig von z sind. Da die Variable z , wenn auch sehr klein, doch im Uebrigen *beliebig* ist, so müssen in dieser Formel (e.) auf beiden Seiten die Coefficienten von z^7, z^9, z^{11}, z^{13} einzeln einander gleich sein, mithin die vier Relationen stattfinden:

$$\begin{aligned}
 (f.) \quad 0 &= \frac{M_1}{7} + \frac{M_3}{5} + \frac{M_5}{3} + \frac{M_7}{1}, \\
 0 &= \frac{M_1}{9} + \frac{M_3}{7} + \frac{M_5}{5} + \frac{M_7}{3}, \\
 0 &= \frac{M_1}{11} + \frac{M_3}{9} + \frac{M_5}{7} + \frac{M_7}{5}, \\
 0 &= \frac{M_1}{13} + \frac{M_3}{11} + \frac{M_5}{9} + \frac{M_7}{7};
 \end{aligned}$$

woraus folgt*), dass die Constanten M_1, M_3, M_5, M_7 sämmtlich *Null* sind:

$$(F.) \quad M_1 = M_3 = M_5 = M_7 = 0.$$

Andererseits ergeben sich aus (c.) durch Vergleichung der Coefficienten von z^8, z^{10}, z^{12} die drei Relationen:

$$(g.) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{9} + \frac{M_2}{7} + \frac{M_4}{5} + \frac{M_6}{3}, \\ 0 &= \frac{1}{11} + \frac{M_2}{9} + \frac{M_4}{7} + \frac{M_6}{5}, \\ 0 &= \frac{1}{13} + \frac{M_2}{11} + \frac{M_4}{9} + \frac{M_6}{7}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die in der Function $P_7(z)$ enthaltenen constanten Coefficienten mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, setzt man also:

$$(g'.) \quad P_7(z) = \alpha z^7 + \beta z^5 + \gamma z^3 + \delta z,$$

so ergeben sich für diese Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, auf Grund der bekannten Formeln:

$$(g''.) \quad \int_{-1}^{+1} z P_7(z) dz = 0, \quad \int_{-1}^{+1} z^3 P_7(z) dz = 0, \quad \int_{-1}^{+1} z^5 P_7(z) dz = 0,$$

[vgl. (5.) pg. 81.],

folgende Gleichungen**):

$$(g'''.) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{\alpha}{9} + \frac{\beta}{7} + \frac{\gamma}{5} + \frac{\delta}{3}, \\ 0 &= \frac{\alpha}{11} + \frac{\beta}{9} + \frac{\gamma}{7} + \frac{\delta}{5}, \\ 0 &= \frac{\alpha}{13} + \frac{\beta}{11} + \frac{\gamma}{9} + \frac{\delta}{7}. \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Formeln (g'''.) mit den Formeln (g.) zeigt sofort***), dass die Proportionen stattfinden:

$$(G.) \quad 1 : M_2 : M_4 : M_6 = \alpha : \beta : \gamma : \delta.$$

Substituirt man nun die in (F.) und (G.) erhaltenen Werthe der M 's in die identische Gleichung (c.), so erhält man:

$$(1 - \mu_1 z)(1 - \mu_2 z) \dots (1 - \mu_7 z) = 1 + \frac{\beta}{\alpha} z^2 + \frac{\gamma}{\alpha} z^4 + \frac{\delta}{\alpha} z^6,$$

*) Vgl. die Erläuterung pg. 139.

**) Man erhält nämlich diese Gleichungen (g'''.) dadurch, dass man in den Formeln (g'') für $P_7(z)$ den Werth (g'.) substituirt, und sodann die Integration wirklich ausführt.

***) Vgl. die Erläuterung pg. 141.

oder, falls man $z = \frac{1}{\xi}$ setzt:

$$(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2) \dots (\xi - \mu_7) = \xi^7 + \frac{\beta}{\alpha} \xi^5 + \frac{\gamma}{\alpha} \xi^3 + \frac{\delta}{\alpha} \xi.$$

Hieraus aber folgt sofort, dass $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_7$ nichts Anderes sind, als die Wurzeln der Gleichung:

$$\alpha \xi^7 + \beta \xi^5 + \gamma \xi^3 + \delta \xi = 0,$$

d. i. [vgl. (g'.)] der Gleichung: $P_7(\xi) = 0$. — *Q. e. d.*

Erläuterung zu (f.), (F.) pg. 137, 138. — Es könnte vielleicht in Zweifel gezogen werden, ob die vier Constanten M_1, M_3, M_5, M_7 durch die vier Gleichungen (f.) *völlig bestimmt* sind. Denn es könnte ja möglicherweise *eine* dieser Gleichungen eine Folge der *übrigen* sein. Dann aber würden jene Constanten durch die vier Gleichungen *nicht völlig* bestimmt sein, mithin die Formeln (F.) *fehlerhaft*, oder wenigstens *zweifelhaft* sein. Diesen Zweifeln kann durch eine ziemlich einfache Betrachtung begegnet werden, bei welcher wir die Werthe der Integrale

$$(\alpha.) \quad \int_{-1}^{+1} z^q P_n(z) dz \text{ zur Abkürzung } = K_n^q$$

setzen wollen. Alsdann ist z. B. [vgl. (5.) pg. 81]

$$(\beta.) \quad \int_{-1}^{+1} z^q P_n(z) dz = K_n^q \text{ stets } = 0, \text{ falls } q < n.$$

Und ferner ist alsdann [vgl. (7.) pg. 82]:

$$(\gamma.) \quad \int_{-1}^{+1} z^n P_n(z) dz = K_n^n = \frac{2^{n+1} \Pi^2(n)}{\Pi(2n+1)},$$

wo Π die Gauss'sche Function bezeichnet.

Denkt man sich nun in der Function

$$(\delta.) \quad \Phi = AP_6(z) + BP_4(z) + CP_2(z) + DP_0(z)$$

die Constanten A, B, C, D in *willkürlicher Weise* gegeben, so wird man die Function stets in die Form versetzen können:

$$(\varepsilon.) \quad \Phi = Az^6 + Bz^4 + \Gamma z^2 + \Delta,$$

wo A, B, Γ, Δ gewisse neue Constanten vorstellen. Versteht man aber unter q irgend eine Zahl der Reihe $0, 2, 4, 6, \dots$, und substituirt man in der identischen Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} z^q \Phi dz = \int_{-1}^{+1} z^q \Phi dz$$

auf der *linken* Seite für Φ den Werth $(\delta.)$, auf der *rechten* Seite für Φ den Werth $(\varepsilon.)$, so erhält man mit Rücksicht auf $(\alpha.)$ sofort:

$$AK_6^q + BK_4^q + CK_2^q + DK_0^q = 2 \left(\frac{A}{q+7} + \frac{B}{q+5} + \frac{\Gamma}{q+3} + \frac{\Delta}{q+1} \right).$$

Setzt man hier q der Reihe nach $= 0, 2, 4, 6$, so erhält man mit Rücksicht auf $(\beta.)$ die vier Formeln:

$$\begin{aligned} DK_0^0 &= 2 \left(\frac{A}{7} + \frac{B}{5} + \frac{\Gamma}{3} + \frac{\Delta}{1} \right), \\ (\xi.) \quad CK_2^2 + DK_0^2 &= 2 \left(\frac{A}{9} + \frac{B}{7} + \frac{\Gamma}{5} + \frac{\Delta}{3} \right), \\ BK_4^4 + CK_2^4 + DK_0^4 &= 2 \left(\frac{A}{11} + \frac{B}{9} + \frac{\Gamma}{7} + \frac{\Delta}{5} \right), \\ AK_6^6 + BK_4^6 + CK_2^6 + DK_0^6 &= 2 \left(\frac{A}{13} + \frac{B}{11} + \frac{\Gamma}{9} + \frac{\Delta}{7} \right). \end{aligned}$$

Der durch $(\delta.)$, $(\varepsilon.)$ zwischen den ursprünglichen Constanten A, B, C, D und den neuen Constanten A, B, Γ, Δ gegebene Zusammenhang ist solcher Art, dass für *jedwedes* *endliche* Werthsystem der erstern ein *bestimmtes* *endliches* Werthsystem der letztern sich ergibt. Denkt man sich nun, was offenbar immer möglich*) ist, jenes *endliche* Werthsystem der Constanten A, B, C, D in solcher Weise eingerichtet, dass die *linken* Seiten der Gleichungen $(\xi.)$ *willkürlich vorgeschriebene endliche* Werthe $2\mathfrak{Q}_1, 2\mathfrak{Q}_2, 2\mathfrak{Q}_3, 2\mathfrak{Q}_4$ annehmen, so wird diesen Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= \frac{A}{7} + \frac{B}{5} + \frac{\Gamma}{3} + \frac{\Delta}{1}, \\ \mathfrak{Q}_2 &= \frac{A}{9} + \frac{B}{7} + \frac{\Gamma}{5} + \frac{\Delta}{3}, \\ (\eta.) \quad \mathfrak{Q}_3 &= \frac{A}{11} + \frac{B}{9} + \frac{\Gamma}{7} + \frac{\Delta}{5}, \\ \mathfrak{Q}_4 &= \frac{A}{13} + \frac{B}{11} + \frac{\Gamma}{9} + \frac{\Delta}{7} \end{aligned}$$

Genüge geleistet werden durch das den A, B, C, D zugehörige *endliche* Werthsystem der A, B, Γ, Δ .

Somit zeigt sich, dass stets ein *endliches*, die Gleichungen $(\eta.)$ erfüllendes Werthsystem der A, B, Γ, Δ existirt, welche *endlichen* Werthe man den linken Seiten $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_4$ auch zuertheilen mag. Und hieraus folgt, dass die Determinante der Gleichungen $(\eta.)$ nicht Null sein kann. Gleiches gilt daher auch von der Determinante der Gleichungen $(f.)$. — Q. e. d.

*) Es ist das immer möglich, weil die K 's *bestimmte endliche Zahlen* vorstellen, und weil überdies die Zahlen K_n^n , nach $(\gamma.)$ von Null verschieden sind.

$$(5.) \quad f(\mu, \varphi) =$$

$$= A_0^0 P_0(\mu)$$

$$+ A_1^0 P_1(\mu) + \left[\begin{array}{c} A_1^1 \cos \varphi \\ + B_1^1 \sin \varphi \end{array} \right] P_{11}(\mu)$$

$$+ A_2^0 P_2(\mu) + \left[\begin{array}{c} A_2^1 \cos \varphi \\ + B_2^1 \sin \varphi \end{array} \right] P_{21}(\mu) + \left[\begin{array}{c} A_2^2 \cos 2\varphi \\ + B_2^2 \sin 2\varphi \end{array} \right] P_{22}(\mu)$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$+ A_p^0 P_p(\mu) + \left[\begin{array}{c} A_p^1 \cos \varphi \\ + B_p^1 \sin \varphi \end{array} \right] P_{p1}(\mu) + \left[\begin{array}{c} A_p^2 \cos 2\varphi \\ + B_p^2 \sin 2\varphi \end{array} \right] P_{p2}(\mu) \dots + \left[\begin{array}{c} A_p^p \cos p\varphi \\ + B_p^p \sin p\varphi \end{array} \right] P_{pp}(\mu)$$

Mit andern Worten: Wir stellen uns die Aufgabe, die in dieser Formel enthaltenen unbekannten Constanten A, B , auf Grund jener Beobachtungsdata (3.), wirklich zu berechnen. Dabei behalten wir uns vor, über die Anzahl und Lage der Parallelkreise d. i. über die Zahl q und die Werthe der Parameter $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_q$ später bestimmte Voraussetzungen eintreten zu lassen. Einstweilen mögen q und $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_q$ als *willkürlich* gegeben angesehen werden.

In den $2pq$ Beobachtungsorten ist $\varphi = 0, \alpha, 2\alpha, \dots (2p-1)\alpha$, d. i.

$$\varphi = 0, \quad \frac{\pi}{p}, \quad 2\frac{\pi}{p}, \quad 3\frac{\pi}{p}, \quad \dots \quad (2p-1)\frac{\pi}{p},$$

mithin:

$$p\varphi = 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad \dots \quad (2p-1)\pi.$$

Und hieraus folgt, dass $\sin p\varphi$ in jenen $2pq$ Beobachtungsorten durchweg $= 0$ ist. Das *letzte* Glied der Formel (5.):

$$B_p^p \sin p\varphi P_{pp}(\mu)$$

wird somit in jenen $2pq$ Beobachtungsorten durchweg *verschwinden*. Hieraus erkennt man, dass jene $2pq$ Beobachtungsdata (3.) über den Werth der Constanten B_p^p keinerlei Aufschluss zu geben im Stande sind. Und demgemäss wird es, was die Berechnung der Constanten A, B betrifft, nothwendig sein, auf die Berechnung jener *letzten* Constante B_p^p von vornherein Verzicht zu leisten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, diese letzte Constante als *Null* zu betrachten:

$$(5a.) \quad B_p^p = 0.$$

Wir werden nun, was die gestellte Aufgabe betrifft, zuvörderst gewisse *intermediäre Constanten* C^2, S^2 berechnen, und sodann erst übergehen zur Berechnung der *eigentlich gesuchten Constanten* A, B .

§ 4.

Berechnung der intermediären Constanten C^λ , S^λ .

Addirt man in (5.) die einzelnen Verticalreihen, so erhält man:

$$(6.) \quad f(\mu, \varphi) = C_0 + (C_1 \cos \varphi + S_1 \sin \varphi) + (C_2 \cos 2\varphi + S_2 \sin 2\varphi) + \dots \\ \dots + (C_p \cos p\varphi + S_p \sin p\varphi),$$

oder kürzer geschrieben:

$$(7.) \quad f(\mu, \varphi) = \sum_{j=0}^p (C_j \cos j\varphi + S_j \sin j\varphi),$$

wo die C , S Functionen von μ vorstellen. So z. B. ist:

$$(7a.) \quad C_p = A_p^p P_{pp}(\mu) \quad \text{und} \quad S_p = B_p^p P_{pp}(\mu).$$

Bringt man die Formel (7.) in Anwendung auf die λ^{te} Horizontalreihe der Tabelle (3.), nämlich auf die $2p$ Beobachtungsorte des Parallelkreises μ_λ , und bezeichnet man dabei die speciellen Werthe jener von μ abhängenden Functionen C , S für $\mu = \mu_\lambda$ kurzweg mit C^λ , S^λ , so erhält man folgende $2p$ Gleichungen:

		I.	II.
$f(\mu_\lambda, 0)$	$= \sum_{j=0}^p (C_j^\lambda \cos 0 + S_j^\lambda \sin 0),$	$\cos 0$	$\sin 0$
$f(\mu_\lambda, \alpha)$	$= \sum (C_j^\lambda \cos j\alpha + S_j^\lambda \sin j\alpha),$	$\cos k\alpha$	$\sin k\alpha$
$f(\mu_\lambda, 2\alpha)$	$= \sum (C_j^\lambda \cos 2j\alpha + S_j^\lambda \sin 2j\alpha),$	$\cos 2k\alpha$	$\sin 2k\alpha$
\dots	\dots	\dots	\dots
$f(\mu_\lambda, [2p-1]\alpha)$	$= \sum (C_j^\lambda \cos [2p-1]j\alpha + S_j^\lambda \sin [2p-1]j\alpha),$	$\cos [2p-1]k\alpha$	$\sin [2p-1]k\alpha$

deren linke Seiten *bekannt*, nämlich durch *Beobachtung* ermittelt sind; [vgl. (3.)]. Multiplicirt man diese $2p$ Gleichungen mit den beigesetzten Factoren I., und addirt, indem man dabei unter k irgend eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, 3, \dots p$ versteht, so fallen rechter Hand [wie aus (4.), (6.) pg. 133 folgt] sämtliche Glieder fort, mit alleiniger Ausnahme derjenigen verticalen Cosinus-Reihe, für welche $j = k$ ist; so dass man also erhält:

$$(8.) \quad \sum_{q=0}^{2p-1} f(\mu_\lambda, q\alpha) \cos qk\alpha = C_k^\lambda \sum_{q=0}^{2p-1} \cos^2 qk\alpha, \quad (k = 0, 1, 2, \dots p).$$

Multiplicirt man ferner jene $2p$ Gleichungen mit den beigesetzten Factoren II., und addirt, so ergibt sich [mit Rücksicht auf (5.), (6.) pg. 133]:

$$(9.) \quad \sum_{q=0}^{2p-1} f(\mu_\lambda, q\alpha) \sin qk\alpha = S_k^\lambda \sum_{q=0}^{2p-1} \sin^2 qk\alpha, \quad (k = 0, 1, 2, \dots p).$$

Mittelst der Formeln (10.), (11.), in denen die f 's die gegebenen Beobachtungsdata (3.) repräsentiren, sind die Constanten C^2 , S^2 berechenbar. Und demgemäss sind diese Constanten

$$(12.) \quad \begin{array}{ccccccc} C_0^\lambda, & C_1^\lambda, & C_2^\lambda, & \dots & C_p^\lambda, \\ & S_1^\lambda, & S_2^\lambda, & \dots & S_p^\lambda \end{array}$$

fortan als *bekannte*, als *berechnete* Constanten anzusehen.

§ 5.

Die für die Constanten A, B resultirenden Gleichungen.

Die analytischen Ausdrücke der Functionen C, S sind [vgl. den Uebergang von (5.) zu (6.)] ohne Weiteres angebbar. So z. B. ist:

$$(13.) \quad \begin{aligned} C_0 &= A_0^0 P_0 + A_1^0 P_1 + A_2^0 P_2 \cdots + A_p^0 P_p, \\ C_1 &= A_1^1 P_{11} + A_2^1 P_{21} \cdots + A_p^1 P_{p1}, \\ C_2 &= A_2^2 P_{22} \cdots + A_p^2 P_{p2}, \\ &\vdots \\ C_p &= A_p^p P_{pp}, \end{aligned}$$

oder, falls man all' diese Formeln durch *eine einzige* anzudeuten sucht:

$$(13a) \quad C_j = A_j^i P_{jj} + A_{j+1}^j P_{j+1,j} + A_{j+2}^j P_{j+2,j} \cdots + A_p^j P_{pj},$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, p.$$

Andererseits ergibt sich [vgl. wiederum den Uebergang von (5.) zu (6.)]:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= B_1^1 P_{11} + B_2^1 P_{21} \cdots + B_p^1 P_{p1}, \\
 S_2 &= B_1^2 P_{22} \cdots + B_p^2 P_{p2}, \\
 &\vdots \\
 S_p &= B_1^p P_{pp}
 \end{aligned}
 \quad (14.)$$

oder in collectiver Darstellung:

$$(14a.) \quad S_j = B_j^j P_{jj} + B_{j+1}^j P_{j+1,j} + B_{j+2}^j P_{j+2,j} \cdots + B_p^j P_{pj},$$

$$j = 1, 2, \dots p.$$

In all' diesen Formeln (13.), (13a.), (14.) und (14a.) ist zur Abkürzung das Argument μ unterdrückt. Statt der P , C , S müsste eigentlich überall gesetzt werden $P(\mu)$, $C(\mu)$, $S(\mu)$.

Bringt man die Formeln (13a.) und (14a.) in Anwendung auf $\mu = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_l$, und bezeichnet man dabei die speciellen Werthe jener Functionen P, C, S für $\mu = \mu_l$ kurzweg mit P^l, C^l, S^l , so erhält man für diejenigen Constanten A_j , welche mit einem gegebenen oberen Index j behaftet sind, folgende q Gleichungen:

$$(15.) \quad C_j^\lambda = A_j^j P_{jj}^\lambda + A_{j+1}^j P_{j+1,j}^\lambda \cdots + A_p^j P_{pj}^\lambda, \\ \lambda = 1, 2, 3, \dots, q,$$

und gleichzeitig für diejenigen Constanten B , welche mit einem gegebenen obren Index j behaftet sind, folgende analoge q Gleichungen:

$$(16.) \quad S_j^\lambda = B_j^j P_{jj}^\lambda + B_{j+1}^j P_{j+1,j}^\lambda \cdots + B_p^j P_{pj}^\lambda, \\ \lambda = 1, 2, 3, \dots, q,$$

Es handelt sich darum, aus den q Gleichungen (15.) die A^j , und aus den q Gleichungen (16.) die B^j wirklich zu berechnen.

§ 6.

Berechnung der Constanten A , B .

Die Anzahl der Parallelkreise mag jetzt in bestimmter Weise festgesetzt werden:

$$(17.) \quad q = 2p + 1.$$

Dabei aber mag die *Lage* dieser Kreise *beliebig* bleiben; so dass also die (stets zwischen -1 und $+1$ liegenden) Parameter $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2p+1}$ dieser $2p+1$ Kreise *beliebig* gegeben zu denken sind. Diesen gegebenen Constanten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2p+1}$ mögen gewisse auxiliäre Constanten $a_1, a_2, \dots, a_{2p+1}$ adjungirt werden mittelst der $(2p+1)$ Gleichungen:

$$(18.) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 \cdots + a_{2p+1} &= \int_{-1}^{+1} dx, \\ a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 \cdots + a_{2p+1} \mu_{2p+1} &= \int_{-1}^{+1} x dx, \\ a_1 \mu_1^2 + a_2 \mu_2^2 \cdots + a_{2p+1} \mu_{2p+1}^2 &= \int_{-1}^{+1} x^2 dx, \\ &\vdots \\ a_1 \mu_1^{2p} + a_2 \mu_2^{2p} \cdots + a_{2p+1} \mu_{2p+1}^{2p} &= \int_{-1}^{+1} x^{2p} dx. \end{aligned}$$

Mit Bezug auf diese Gleichungen lautet alsdann der Hilfssatz (4.) pg. 135 folgendermassen:

Sind m und n irgend zwei positive ganze Zahlen, deren Summe $(m+n)$ einen der Werthe

$$(19.) \quad 0, 1, 2, 3, \dots, 2p$$

besitzt, so wird die Summe

$$(20.) \quad \sum_{\lambda=1}^{2p+1} a_{\lambda} P_{mj}^{\lambda} P_{nj}^{\lambda} \quad \text{bald} = \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)}, \quad \text{bald} = 0$$

sein, je nachdem $m = n$, oder $m \neq n$ ist. Dabei stehen P_{mj}^{λ} und P_{nj}^{λ} , ebenso wie bisher, zur Abkürzung für die Ausdrücke: $P_{mj}(\mu_j)$ und $P_{nj}(\mu_n)$.

Dies vorausgeschickt, sind nun die $(2p+1)$ Gleichungen (15.):

$$(21.) \quad C_j^{\lambda} = A_j^j P_{jj}^{\lambda} + A_{j+1}^j P_{j+1,j}^{\lambda} \cdots + A_p^j P_{pj}^{\lambda} \quad | \quad a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} \\ \lambda = 1, 2, 3, \dots (2p+1)$$

leicht auflösbar nach den darin enthaltenen A 's. Ist nämlich A_n^j irgend eines dieser A 's, mithin n eine Zahl aus der Reihe $j, (j+1), (j+2), \dots p$:

$$(22.) \quad n = j, (j+1), (j+2), \dots p,$$

so braucht man, um den Werth dieses A_n^j zu finden, jene Gleichungen (21.) nur zu multipliciren mit den beigesetzten Factoren $a_j P_{nj}^{\lambda}$, und sodann zu addiren. In solcher Weise nämlich erhält man:

$$\sum_{\lambda=1}^{2p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} C_j^{\lambda} = \\ = A_j^j \left[\sum_{\lambda=1}^{2p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} P_{nj}^{\lambda} \right] + A_{j+1}^j \left[\sum_{\lambda=1}^{2p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} P_{j+1,j}^{\lambda} \right] \cdots + A_p^j \left[\sum_{\lambda=1}^{2p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} P_{pj}^{\lambda} \right],$$

oder kürzer geschrieben:

$$(23.) \quad \sum_{\lambda=1}^{2p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} C_j^{\lambda} = \sum_{m=j}^p \left\{ A_m^j \left[\sum_{\lambda=1}^{2p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} P_{mj}^{\lambda} \right] \right\}.$$

Hier geht die Summation nach m von j bis p ; so dass also m stets $< p$ bleibt. Ebenso aber ist, nach (22.), auch n stets $< p$. Folglich ist $(m+n)$ stets $\leq 2p$. Und hieraus erkennt man sofort, dass die in (23.) in der eckigen Klammer enthaltene Summe dem Satze (19.), (20.) sich subordinirt, dass dieselbe also

$$= \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)}, \quad \text{oder} = 0$$

sein wird, je nachdem $m = n$, oder $m \neq n$ ist. Demgemäss geht die Formel (23.) über in

$$(24.) \quad \sum_{\lambda=1}^{2p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} C_j^{\lambda} = A_n^j \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)};$$

woraus folgt:

$$(25.) \quad A_n^j = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} \sum_{\lambda=1}^{2p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} C_j^{\lambda}.$$

Ebenso, wie diese Formel (25.) für die A_n^j aus den Gleichungen (15.) entsprungen ist, in genau derselben Weise werden sich offenbar aus den Gleichungen (16.) für die daselbst enthaltenen B_n^j folgende Werthe ergeben:

$$(26.) \quad B_n^j = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} \sum_{\lambda=1}^{2p+1} a_\lambda P_{nj}^\lambda S_j^\lambda.$$

Durch diese Formeln (25.), (26.), in denen die Constanten C^λ, S^λ bereits *bekannt* sind [vgl. (12.)], bestimmen sich sämtliche in den Formeln (13.), (14.) enthaltenen Constanten A, B . Oder mit andern Worten: *Es bestimmen sich durch diese Formeln (25.), (26.) alle in $Y_0, Y_1, Y_2, \dots Y_p$ enthaltenen Constanten A, B .* Das aber war die Aufgabe, um deren Lösung es sich handelte.

Wir haben hier diese Aufgabe absolvirt unter Anwendung von $(2p+1)$ Parallelkreisen, d. i. unter Anwendung von $2p(2p+1)$ Beobachtungen. Im folgenden Paragraph werden wir zeigen, dass man mit *ungefähr halb so viel* Parallelkreisen und Beobachtungen ausreicht, falls man nur jene Kreise nicht mehr beliebig, sondern nach einem bestimmten Gesetze ausgewählt sich denkt.

§ 7.

Andere Methode zur Berechnung der Constanten A, B .

Wir wollen, ohne sonst etwas zu ändern, nur die Betrachtungen des *letzten* Paragraphen durch etwas andere Operationen ersetzen. Die Anzahl der Parallelkreise mag nämlich nicht mehr $= (2p+1)$, sondern $= (p+1)$ angenommen sein:

$$(27.) \quad q = p+1.$$

Gleichzeitig aber mag die *Lage* dieser Kreise einem bestimmten Gesetze unterworfen sein. Es mögen nämlich die Parameter derselben:

$$\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{p+1}$$

in solcher Weise ausgewählt gedacht sein, dass sie in Verbindung mit $(p+1)$ andern Constanten $a_1, a_2, \dots a_{p+1}$ den $(2p+2)$ Gleichungen entsprechen:

$$(28.) \quad \begin{array}{llll} a_1 & + a_2 & \dots + a_{p+1} & = \int_{-1}^{+1} dx, \\ a_1 \mu_1 & + a_2 \mu_2 & \dots + a_{p+1} \mu_{p+1} & = \int_{-1}^{+1} x dx, \\ a_1 \mu_1^2 & + a_2 \mu_2^2 & \dots + a_{p+1} \mu_{p+1}^2 & = \int_{-1}^{+1} x^2 dx, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 \mu_1^{2p+1} & + a_2 \mu_2^{2p+1} & \dots + a_{p+1} \mu_{p+1}^{2p+1} & = \int_{-1}^{+1} x^{2p+1} dx; \end{array}$$

so dass also $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{p+1}$, zufolge des Satzes pg. 136, nichts Anderes sind als die Wurzeln der Gleichung:

$$(28a.) \quad P_{p+1}(\mu) = 0.$$

Mit Bezug auf die Gleichungen (28.) lautet offenbar der Hilfssatz (4.) pg. 135 folgendermassen:

Sind m und n irgend zwei positive ganze Zahlen, deren Summe $(m+n)$ einen der Werthe besitzt:

$$(29.) \quad 0, 1, 2, 3, \dots (2p+1),$$

so wird die Summe

$$(30.) \quad \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_{\lambda} P_{mj}^{\lambda} P_{nj}^{\lambda} \text{ bald } = \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)}, \text{ bald } = 0$$

sein, je nachdem $m = n$, oder $m \neq n$ ist.

Dies vorausgeschickt, sind nun die Gleichungen (15.):

$$C_j^{\lambda} = A_j^j P_{jj}^{\lambda} + A_{j+1}^j P_{j+1,j}^{\lambda} \cdots + A_p^j P_{pj}^{\lambda} | a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda}, \\ \lambda = 1, 2, 3, \dots (p+1),$$

deren Anzahl jetzt $= (p+1)$ ist, wiederum leicht auflösbar nach den darin enthaltenen A 's. Ist z. B. A_n^j irgend eines dieser A 's, so wird man, um den Werth von A_n^j zu erhalten, die vorstehenden Gleichungen nur mit den beigesetzten Factoren $a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda}$ zu multipliciren, und sodann zu addiren haben. In solcher Weise ergibt sich nämlich, mittelst des Satzes (29.), (30.):

$$\sum_{\lambda=1}^{p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} C_j^{\lambda} = A_n^j \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)},$$

mithin:

$$(31.) \quad A_n^j = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} C_j^{\lambda}.$$

Und in analoger Weise ergibt sich aus (16.):

$$(32.) \quad B_n^j = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_{\lambda} P_{nj}^{\lambda} S_j^{\lambda}.$$

Durch diese Formeln (31.), (32.), in denen die Constanten C^{λ} , S^{λ} bereits bekannt sind [vgl. (12.)], bestimmen sich sämmtliche in $Y_0, Y_1, Y_2, \dots Y_p$ enthaltenen Constanten A, B .

§ 8.

Recapitulation.

Wir haben die Aufgabe besprochen, eine unbekannte Function $f(\mu, \varphi)$, auf Grund gegebener Beobachtungen, nach Kugelfunctionen bis inclusive zur Kugelfunction p^{ter} Ordnung zu entwickeln, und zwei einfache Methoden exponirt zur Absolvirung dieser Aufgabe.

Bei *beiden* Methoden wird vorausgesetzt, dass die Beobachtungsorte in denjenigen Punkten liegen, in denen $2p$ äquidistante Meridiane und eine gewisse Anzahl von Parallelkreisen einander schneiden.

Die *erste* Methode (pg. 146—148) ist anwendbar, wenn diese Parallelkreise von der *Anzahl* $(2p + 1)$, übrigens aber von *beliebiger* Lage sind.

Andererseits ist die *zweite* Methode (pg. 148, 149) dann anwendbar, wenn die Parallelkreise *nur* von der Anzahl $(p + 1)$, dabei aber von *solcher* Lage sind, dass ihre Parameter $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{p+1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$P_{p+1}(\mu) = 0$$

repräsentiren. — Bei dieser zweiten Methode ist also, um das vorgesteckte Ziel zu erreichen, die Anzahl der erforderlichen Parallelkreise, mithin auch die Anzahl der erforderlichen Beobachtungen nur etwa *halb so gross*, als bei der ersten Methode.

Bemerkungen. — Ist z. B. $p = 4$ [soll also $f(\mu, \varphi)$ bis inclusive zur 4^{ten} Kugelfunction entwickelt werden], so hat man, bei Anwendung der *zweiten* Methode, im Ganzen 5 Parallelkreise zu benutzen, und diese in solcher Weise zu construiren, dass ihre Parameter $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ die Wurzeln der Gleichung

$$P_5(\mu) = 0 \quad \text{d. i.} \quad \mu^5 - \frac{5.4}{2.9} \mu^3 + \frac{5.4.3.2}{2.4.7.9} \mu = 0$$

sind. Hieraus ergeben sich, falls man $\mu = \sin B$ setzt, für die *geographischen Breiten* B jener 5 Parallelkreise folgende Werthe:

$$B = 0, \quad B = \pm (32^\circ 34' 36''), \quad B = \pm (64^\circ 58' 57'').$$

Ist ferner, um ein zweites Beispiel anzuführen, $p = 5$, so sind 6 Parallelkreise anzuwenden, entsprechend der Gleichung $P_6(\mu) = 0$. Hieraus ergeben sich für die geographischen Breiten dieser 6 Parallelkreise die Werthe:

$$B = \pm (13^\circ 48' 18''), \quad B = \pm (41^\circ 23' 32''), \quad B = \pm (68^\circ 49' 18'').$$

Ist ferner $p = 6$, so sind 7 Parallelkreise anzuwenden, entsprechend der Gleichung $P_7(\mu) = 0$, woraus folgt:

$$B = 0, \quad B = \pm (23^\circ 56' 38''), \quad B = \pm (47^\circ 51' 43''), \quad B = \pm (71^\circ 38' 31'').$$

§ 9.

Beiläufige Betrachtung über solche Functionen, die nur von einem einzigen Argument abhängen.

Eine innerhalb des Intervalls $\mu = -1 \dots +1$ überall *endliche* Function $\Phi(\mu)$ ist innerhalb dieses Intervalls in eine nach den Kugelfunctionen $P_n(\mu)$ fortschreitende Reihe entwickelbar:

Wir wollen nun jene $(p + 1)$ *Beobachtungsorte* zusammenfallen lassen mit diesen $(p + 1)$ Wurzeln $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p+1}$ der Gleichung (D.). Das hat in der Regel keine Schwierigkeit. Andernfalls wird man die Werthe der Function $\Phi(\mu)$ in diesen Wurzelpunkten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p+1}$ leicht durch gewöhnliche Interpolation aus solchen Beobachtungen abzuleiten im Stande sein; die in möglichster Nähe dieser Punkte angestellt worden sind.

In solcher Weise ergeben sich aus (2.) folgende $(p + 1)$ Gleichungen:

$$(3.) \quad \Phi(\mu_\lambda) = A_0 P_0(\mu_\lambda) + A_1 P_1(\mu_\lambda) \cdots + A_p P_p(\mu_\lambda) \quad | \quad a_\lambda P_n(\mu_\lambda) \\ \lambda = 1, 2, 3, \dots (p + 1),$$

deren linke Seiten *bekannt* (entweder direct beobachtet, oder aus Beobachtungen abgeleitet) sind. Um nun irgend eine der Constanten A_0, A_1, \dots, A_p , z. B. die Constante A_n zu berechnen, multipliciren wir die Gleichungen (3.) mit den daneben gesetzten Factoren $a_\lambda P_n(\mu_\lambda)$, und addiren. Alsdann ergibt sich auf Grund unseres Hilfssatzes:

$$(4.) \quad \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_n(\mu_\lambda) \Phi(\mu_\lambda) = A_n \frac{2}{2n+1},$$

d. i.

$$(5.) \quad A_n = \frac{2n+1}{2} \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_n(\mu_\lambda) \Phi(\mu_\lambda).$$

Hiermit ist die Berechnung der in (2.) enthaltenen Constanten A_0, A_1, \dots, A_p absolvirt, die gestellte Aufgabe also gelöst.

Diese Methode zur Bestimmung der Function $\Phi(\mu)$ auf Grund passend zu wählender Beobachtungsorte ist namentlich deswegen beachtenswerth, weil man dabei *dieselbe Genauigkeit* wie bei der Methode der kleinsten Quadrate mit weniger Mühe erreichen kann. In der That hat man dabei nicht so unbequeme Gleichungen aufzulösen nöthig, wie sie jene Methode der kleinsten Quadrate mit sich bringt.

Bemerkung. — Ist die Function $\Phi(\mu)$ zufälliger Weise eine ganze rationale Function p^{ten} oder noch niedrigeren Grades, so ist die Darstellung (2.) eine völlig genaue. Ist hingegen die Function $\Phi(\mu)$ von irgend welchem *andern* Charakter, so wird die Darstellung (2.) immer nur eine approximative sein. Dabei ist beachtenswerth, dass die Genauigkeit, mit welcher A_0, A_1, \dots, A_p bei der hier exponirten Methode sich ergeben, für die einzelnen A 's eine *verschiedene*, nämlich am grössten für A_0 , geringer schon für A_1 , noch geringer für A_2 , u. s. w., endlich am geringsten für A_p ist.

In Wirklichkeit ist nämlich $\Phi(\mu)$ durch die in (1.) angegebene *unendliche* Reihe dargestellt; so dass man also, falls alle Vernach-

lässigungen ausgeschlossen werden sollen, für die Punkte $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p+1}$ folgende Gleichungen erhält:

$$(6.) \quad \Phi(\mu_\lambda) = A_0 P_0(\mu_\lambda) + A_1 P_1(\mu_\lambda) + A_2 P_2(\mu_\lambda) + \dots \text{ in inf. } |a_\lambda P_0(\mu_\lambda)| \\ \lambda = 1, 2, 3, \dots (p+1).$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den beigesetzten Factoren $a_\lambda P_0(\mu_\lambda)$, und addirt, so ergibt sich unter Anwendung unseres Hilfssatzes:

$$(7.) \quad \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_0(\mu_\lambda) \Phi(\mu_\lambda) = \frac{2}{1} A_0 + \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_0(\mu_\lambda) \Phi_{2p+2}(\mu_\lambda);$$

wo Φ_{2p+2} die aus (1a.) ersichtliche Bedeutung hat*).

In analoger Weise ergibt sich, indem man in dem bei (6.) angewandten Factor P_1 statt P_0 setzt, die Formel:

$$(8.) \quad \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_1(\mu_\lambda) \Phi(\mu_\lambda) = \frac{2}{3} A_1 + \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_1(\mu_\lambda) \Phi_{2p+1}(\mu_\lambda),$$

oder, falls man dort P_2 setzt:

$$(9.) \quad \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_2(\mu_\lambda) \Phi(\mu_\lambda) = \frac{2}{5} A_2 + \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_2(\mu_\lambda) \Phi_{2p}(\mu_\lambda),$$

u. s. w., u. s. w.

Diese Formeln (7.), (8.), (9.) zeigen, dass die bei unserer Methode für

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots A_p$$

erhaltenen Werthe (5.) mit Fehlern behaftet sind respective von der Ordnung:

$$\Phi_{2p+2}, \Phi_{2p+1}, \Phi_{2p}, \Phi_{2p-1}, \dots \Phi_{p+2},$$

dass also in der That A_0 mit grösserer Genauigkeit berechnet ist, als A_1 , u. s. w.

Dies ist besonders deswegen von Wichtigkeit, weil es häufig gar nicht auf die Berechnung *aller* Constanten, sondern z. B. *nur* auf A_0 , oder *nur* auf A_0 und A_1 ankommt. Soll z. B. der Flächeninhalt:

$$\mathfrak{S} = \int_{-1}^{+1} \Phi(u) du$$

berechnet werden, so ergibt sich nach (1.) und mit Rücksicht auf (Ia.) pg. 78:

$$\mathfrak{S} = 2A_0,$$

so dass also in diesem Falle *lediglich* A_0 in Betracht kommt.

*) Man hat nämlich, was die Ableitung der Formel (7.) anbelangt, zu beachten, dass die in jenem Hilfssatz angegebene Formel (C.) pg. 151 nur anwendbar ist, so lange die Bedingung (B.) erfüllt bleibt.

Zweite Bemerkung. — Die in diesem Paragraph angestellten Betrachtungen sind leicht übertragbar auf die Bestimmung einer Function zwischen zwei *beliebig* gegebenen Grenzen. Soll z. B. $F(x)$ bestimmt werden zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$, wo $a < b$ *beliebig gegebene* Constanten sind, so setze man:

$$x = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \mu.$$

Alsdann verwandelt sich $F(x)$ in eine von μ abhängende Function

$$\Phi(\mu) = F\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \mu\right);$$

und gleichzeitig verwandelt sich dabei das Intervall $x = a \cdots b$ in das neue Intervall $\mu = -1 \cdots +1$.

Den Gegenstand dieses letzten Paragraphs hat Gauss bereits 1814 in seiner *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (Ges. Werke Bd. 3, pg. 165 und 202) behandelt. Gauss bezeichnet daselbst die Gleichung, deren Wurzeln die μ 's sind, mit $U = 0$, scheint aber nicht bemerkt zu haben, dass die Function U identisch ist mit der Legendre-Laplace'schen Function $P_{p+1}(\mu)$. Uebrigens ist die hier von uns angewandte Bezeichnung [welche in gleicher Weise auch in dem Neumann'schen Aufsatz von 1838, Math. Annalen, Bd. 14 sich vorfindet] von der Gauss'schen Bezeichnungsweise verschieden. Unsere a 's sind nämlich in der *Methodus nova* mit $2R, 2R', \dots$ bezeichnet; und unsere μ 's erhält man aus den dortigen a 's dadurch, dass man jene a 's verdoppelt und von 1 subtrahirt.

Noch sei bemerkt, dass die auf pg. 150 angegebenen numerischen Werthe der B's auf den Gauss'schen Angaben in der *Methodus nova* beruhen.

Achtes Capitel.

Die Theorie der elektrischen Vertheilung.

Die hier zu entwickelnde Theorie rührt wesentlich von *Poisson* her. Sie ist von Poisson dargelegt in seiner berühmten und classischen Abhandlung: *Sur la Distribution de l'Électricité à la surface des Corps conducteurs, 1812 et 1813*, in den Memoiren der Pariser Akademie.

Wir werden in diesem Capitel zuvörderst die in Rede stehende allgemeine Theorie darlegen, und sodann dieselbe beispielsweise auf solche Fälle in Anwendung bringen, wo der betrachtete Conductor entweder eine *Kugel* oder ein *Sphäroid* ist.

§ 1.

Die Grundvorstellungen.

Die Theorie geht aus von der Hypothese zweier elektrischen Flüssigkeiten, von denen die ungleichartigen sich anziehen, die gleichartigen sich abstossen, und zwar im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung. Der *natürliche* Zustand eines Körpers besteht darin, dass beide Elektricitäten *gleichmässig* mit einander verbunden sind, mithin an jeder Stelle des Körpers ebensoviel von der einen, wie von der andern sich vorfindet. Diese *gleichmässig* mit einander verbundenen Elektricitäten werden nach Aussen hin Wirkungen besitzen, die einander gegenseitig zerstören. Mit andern Worten: Sie werden hinsichtlich ihrer Wirkungen sich gegenseitig *neutralisiren*, und pflegen daher zusammengenommen kurzweg als *neutrale Elektricität* bezeichnet zu werden.

Wird die in Rede stehende Gleichmässigkeit durch irgend welche Ursachen aufgehoben, so geht der *natürliche* Zustand in den sogenannten *elektrischen* Zustand über. Eine solche Aufhebung jener ursprünglichen Gleichmässigkeit kann in doppelter Weise erfolgen, nämlich entweder dadurch, dass man dem Körper von Aussen her positive oder negative Elektricität mittheilt, oder auch dadurch, dass man irgend welche Kräfte auf den Körper einwirken lässt.

Wird z. B. dem Körper von Aussen her irgend ein *Quantum überschüssiger Elektricität* (der einen oder andern Art) mitgetheilt, so wird dieses Quantum auf die beiden von Hause aus in dem Körper enthaltenen Elektricitäten entgegengesetzte Wirkungen ausüben (die eine anziehen, die andere abstossen). Und die in solcher Weise entstehende Bewegung wird so lange fortdauern, *bis die Resultante aller elektrischen Wirkungen an jeder Stelle des Körpers = 0 geworden ist*. Von diesem Augenblicke an wird alsdann Gleichgewicht stattfinden.

Dieses Gleichgewicht kann nun dadurch, dass man von Aussen her irgend welche elektrische Kräfte (z. B. eine durch Reiben elektrisch gemachte Schellackkugel) auf den Körper einwirken lässt, von Neuem gestört werden. Und die so entstehende Bewegung wird alsdann wiederum so lange andauern, *bis die Resultante aller elektrischen Kräfte an jeder Stelle des Körpers zu Null herabsinkt*.

Bei diesen Betrachtungen ist vorausgesetzt, dass der gegebene Körper ein *Leiter* oder *Conductor* sei, dass also die Elektricitäten innerhalb des Körpers *völlig frei beweglich* sind. Ist der Conductor *isolirt*, so wird die in demselben enthaltene Elektricität fortdauernd in ihm zu bleiben gezwungen sein. Ist hingegen der Conductor durch einen Draht *zur Erde abgeleitet*, so kann die elektrische Materie zwischen ihm und der Erde nach Belieben hin und her fliessen. Und es werden also in diesem letztern Falle der gegebene Conductor, die Erdkugel und der Verbindungsdraht zusammengenommen als ein *einziger* grösserer Conductor anzusehen sein.

Bemerkungen. — Sind $+E$ und $-E'$ die, in irgend einem Augenblicke, in einem Volumelement dv des Conductors enthaltenen Mengen positiver und negativer Elektricität, so ist die *Gesamtmasse* der in dv enthaltenen elektrischen Materie

$$(f.) \quad = (+E) + (-E'), \text{ d. i. } = E - E'.$$

Demgemäss kann man diese Gesamtmasse auch bezeichnen als den *Ueberschuss* der positiven über die negative Elektricität, falls man nämlich die beiderlei Elektricitäten, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, nur nach ihren *absoluten* Beträgen beurtheilt.

Man pflegt die soeben genannte Summe oder Differenz (f.) die *in dem Volumelement dv enthaltene freie Elektricität* zu nennen. Sollte also zufälliger Weise $E = E'$ sein, so würde innerhalb dv *gar keine* freie Elektricität, vielmehr nur *neutrale* Elektricität vorhanden sein.

Setzt man ferner $E - E' = \delta dv$, so heisst δ die *Dichtigkeit der in dv enthaltenen freien Elektricität*.

§ 2.

Allgemeine Sätze über das elektrische Gleichgewicht.

Es seien beliebig viele unbeweglich aufgestellte (theils isolirte, theils vielleicht auch zur Erde abgeleitete) *Conductoren* gegeben, denen von Hause aus irgend welche *elektrische Ladungen**) zuertheilt worden sind, und auf welche von Aussen her *gegebene elektrische Kräfte* einwirken. Diese letztern mögen, um die Vorstellung zu fixiren, ihren Sitz in irgend welchen durch Reiben elektrisch gemachten *Isolatoren* haben, nämlich ausgehen von denjenigen *unbeweglichen* elektrischen Massen, die an den Oberflächen dieser Isolatoren, oder vielleicht auch im Innern derselben angehäuft sind**). Alsdann werden die in den Conductoren enthaltenen Elektricitäten, unter ihren gegenseitigen Einwirkungen, sowie auch unter dem Einfluss jener in den Isolatoren enthaltenen Elektricitäten, in Bewegung gerathen. Diese Bewegung, und namentlich der schliesslich eintretende Gleichgewichtszustand sollen näher untersucht werden.

Zu diesem Zwecke betrachten wir irgend *einen* der gegebenen Conductoren, und markiren irgendwo innerhalb desselben ein kleines Volumelement dv . Die in irgend einem Augenblicke innerhalb dv enthaltene Elektricität wird möglicher Weise nur aus *neutraler Elektricität* bestehen, oder vielleicht auch ein *Gemisch von neutraler und freier Elektricität* sein. Im einen wie im andern Falle wird sie aus einer grossen Anzahl einzelner elektrischen Theilchen zusammengesetzt sein, die theils positiv theils negativ sind. Bezeichnet man nun irgend ein solches innerhalb dv befindliches Theilchen mit m , so wird dieses Theilchen *m* *erstens* sollicitirt werden von allen übrigen Elektricitätstheilchen des *betrachteten* Conductors, *zweitens* sollicitirt werden von den Elektricitäten der *übrigen* Conductoren, und *drittens* endlich sollicitirt werden von jenen unbeweglichen Elektricitäten, die in den gegebenen *Isolatoren* angehäuft sind. Uebrigens kommen bei der Berechnung dieser Sollicitationen nur die *freien* Elektricitäten in Betracht. Denn die *neutrale* Elektricität ist (ihrer Definition zufolge) *unwirksam*, also nicht im Stande, auf das Theilchen m irgend welche Kraft auszuüben.

*) D. h. irgend welche Quantitäten überschüssiger Elektricität der einen oder andern Art.

**) Die in einem Isolator enthaltene Elektricität ist daselbst nur *sehr wenig* beweglich. Der Einfachheit willen soll hier diese Beweglichkeit als *Null*, die in einem Isolator angehäuften Elektricität also geradezu als *unbeweglich* angesehen werden.

Bezeichnet man also das Potential aller in sämmtlichen Conductoren und Isolatoren enthaltenen Elektricitäten in Bezug auf das Theilchen m mit V , und die Coordinaten von m mit (x, y, z) , so wird die *Resultante* R aller auf m einwirkenden Kräfte folgende Componenten haben:

$$(1.) \quad \begin{aligned} R \cos (R, x) &= -m \frac{\partial V}{\partial x}, \\ R \cos (R, y) &= -m \frac{\partial V}{\partial y}, \\ R \cos (R, z) &= -m \frac{\partial V}{\partial z}; \end{aligned}$$

wie sich solches aus (12.) pg. 5 sofort ergibt, falls man nur beachtet, dass der dortige Factor f im gegenwärtigen Falle $= 1$ ist; vgl. (4.) pg. 3. Ueberdies wird die Dichtigkeit δ der an der Stelle (x, y, z) vorhandenen freien Elektricität sich bestimmen mittelst der Formel

$$(2.) \quad -4\pi\delta = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

vgl. den Satz (7.) pg. 17.

Soll nun *Gleichgewicht* vorhanden sein, so muss die in Rede stehende Resultante R gleich *Null* sein; denn sonst würde das Theilchen m , unter dem Einfluss von R , in Bewegung gerathen*). Und zwar muss dieses Nullsein von R *stets* stattfinden, welche Lage das betrachtete Theilchen $m(x, y, z)$ innerhalb des Conductors auch haben mag. Somit folgt aus (1.), dass $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ innerhalb des Conductors überall *verschwinden* müssen, und dass also V selber innerhalb des Conductors *constant* sein muss. Hieraus folgt weiter, mit Rücksicht auf (2.), dass die Dichtigkeit δ der freien Elektricität innerhalb des Conductors überall $= 0$ ist. Zur Zeit des Gleichgewichts wird daher *freie* Elektricität niemals im *Innern* des Conductors anzutreffen sein, folglich nur an seiner *Oberfläche* sich vorfinden können.

Diese Betrachtungen gelten für *jedweden* der gegebenen Conductoren; so dass man also zu folgenden Sätzen gelangt:

Erster Satz. — *Denkt man sich ein System gegebener Conductoren mit irgend welchen elektrischen Ladungen versehen, und überdies der Einwirkung irgend welcher durch Reiben elektrisch gemachter Isolatoren ausgesetzt, und bezeichnet man das Potential aller in den Conductoren und Isolatoren vorhandenen Elektricitäten in Bezug auf einen variablen Punkt*

*) Und zwar würden unter dem Einfluss einer (von Null verschiedenen) Kraft R die innerhalb des Volumelements dv vorhandenen *positiven* und *negativen* Elektricitätstheilchen in *entgegengesetzten* Richtungen in Bewegung gerathen, die innerhalb dv enthaltene neutrale Elektricität also *zersetzt* werden.

(x, y, z) mit V , so wird dieses V , nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, innerhalb eines jeden Conductors constant sein.

Dieser constante Werth, welcher selbstverständlich für die einzelnen Conductoren ein verschiedener sein kann, kann kurzweg der Potentialwerth des betreffenden Conductors genannt werden.

Sind also \mathfrak{C} , \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' , etc. die gegebenen Conductoren, und sind G , G' , G'' , etc. die constanten Werthe, welche das Potential V nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes respective in \mathfrak{C} , \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' , etc. besitzt, so soll G der Potentialwerth des Conductors \mathfrak{C} , ebenso G' der von \mathfrak{C}' genannt werden, u. s. f.

Zweiter Satz. — Nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes wird freie Elektricität niemals innerhalb der Conductoren, sondern immer nur an ihren Oberflächen anzutreffen sein.

Mit andern Worten: Nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes wird jeder Conductor an seiner Oberfläche mit einer unendlich dünnen Schicht freier Elektricität bedeckt sein, in seinem Innern aber nur neutrale Elektricität beherbergen.

Ist einer der betrachteten Conductoren, z. B. \mathfrak{C} durch einen dünnen Draht zur Erde abgeleitet, also mit der Erde und dem Draht zusammengekommen als ein einziger grösserer Conductor anzusehen, so wird das Potential V [zufolge des ersten Satzes] innerhalb dieses grössern Conductors allenthalben ein und denselben constanten Werth haben. Demgemäss wird also in diesem Falle der innerhalb \mathfrak{C} vorhandene constante Potentialwerth G ebenso gross sein wie der in der Erde vorhandene, mithin $= 0$ sein*). Somit ergibt sich folgender dritter Satz:

Dritter Satz. — Bezeichnet man, ebenso wie früher, mit V das Potential aller überhaupt vorhandenen Elektricitäten in Bezug auf einen variablen Punkt (x, y, z) , so wird dieses V , nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, innerhalb eines zur Erde abgeleiteten Conductors constant, und zwar $= 0$ sein.

Oder kürzer ausgedrückt: Zur Zeit des Gleichgewichts wird der Potentialwerth eines zur Erde abgeleiteten Conductors $= 0$ sein.

Wir wollen jetzt annehmen, es sei nur ein einziger Conductor vorhanden, daneben aber beliebig viele auf denselben einwirkende Isolatoren. Wir stellen uns die Aufgabe, die unter diesen Umständen auf dem Conductor entstehende elektrische Belegung zu untersuchen.

Es sei do irgend ein Oberflächenelement des Conductors, und εdo die nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes auf do vorhandene

*) Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Erde fortdauernd im natürlichen Zustande verharrt; was allerdings (strenge genommen) nur näherungsweise zutrifft.

Masse freier Elektricität. Demgemäss wird alsdann der Factor ε zu bezeichnen sein als die *Dichtigkeit* oder (genauer ausgedrückt) als die *Flächendichtigkeit* der auf der Conductoroberfläche vorhandenen elektrischen Belegung*). Ferner sei M die Gesamtmasse dieser Belegung, mithin:

$$(\alpha.) \quad M = \int \varepsilon do,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente do der Conductoroberfläche.

Betrachtet man nun irgend einen Punkt i innerhalb des Conductors, und bezeichnet man das Potential aller im Conductor und in den Isolatoren enthaltenen Elektricitäten in Bezug auf i mit V_i , so muss dieses V_i [zufolge des ersten Satzes] *constant* sein für alle Lagen des innern Punktes i , was angedeutet werden mag durch die Formel:

$$(\beta.) \quad V_i = \text{Const.} = G.$$

Das Potential V_i besteht offenbar aus zwei Theilen, nämlich aus einem *ersten Theil*, welcher von den *Isolatoren* herrührt, und F_i heissen mag, und aus einem *zweiten Theil*, welcher herrührt von der im Conductor selbst enthaltenen Elektricität. Dieser zweite Theil aber wird, weil die neutrale Elektricität keinerlei Wirkung auszuüben vermag, mithin bei Berechnung des Potentials ganz ausser Betracht bleiben kann, lediglich herrühren von jener an der Conductoroberfläche vorhandenen elektrischen Belegung, mithin dargestellt sein durch das über diese Oberfläche ausgedehnte Integral:

$$\int \frac{\varepsilon do}{E_i},$$

wo E_i den Abstand des Punktes i vom Elemente εdo vorstellt. Demgemäss gewinnt die Gleichung $(\beta.)$ folgende Gestalt:

$$(\beta'.) \quad F_i + \int \frac{\varepsilon do}{E_i} = \text{Const.} = G.$$

Dabei wird die hier, in $(\beta.)$ oder $(\beta'.)$, auftretende Constante G zu bezeichnen sein als der *Potentialwerth* des Conductors, [vgl. den ersten Satz].

Hinsichtlich dieser Constanten G [in $(\beta.)$, $(\beta'.)$] und der Masse M [in $(\alpha.)$] sind *zwei Fälle* zu unterscheiden, jenachdem der Conductor isolirt, oder zur Erde abgeleitet ist.

*) Wir verstehen also unter der *Flächendichtigkeit* denjenigen Factor, mit welchem das *Flächenelement* zu multipliciren ist, um die auf diesem Flächenelement vorhandene *Masse* zu erhalten.

Ist der Conductor *isolirt*, ist also derselbe jedweder elektrischer Communication mit andern Körpern beraubt, so wird das in ihm enthaltene Quantum freier Elektricität ein *unveränderliches* sein. Es wird daher in diesem Fall die in dem Conductor *zur Zeit des Gleichgewichts* vorhandene freie Elektricität von genau demselben Betrage sein, wie diejenige freie Elektricität, welche dem isolirten Conductor *zu Anfang* von Aussen her mitgetheilt worden war. Mit andern Worten: Es wird in diesem Fall die in (α .) genannte Masse M identisch sein mit der dem Conductor zu Anfang zuertheilten *elektrischen Ladung*. Und es wird also M *bekannt* sein, falls jene Ladung gegeben ist. Andererseits aber wird die in (β .), (β' .) enthaltene Constante G *unbekannt* sein.

Ist hingegen der Conductor *zur Erde abgeleitet*, so findet zwischen ihm und der Erde eine nicht weiter controlirbare elektrische Communication statt. Demgemäss ist in diesem Fall das Quantum M der im Conductor zur Zeit des Gleichgewichts vorhandenen freien Elektricität völlig *unbekannt*. Andererseits aber wird in diesem Fall der im Conductor vorhandene Potentialwerth G *bekannt*, nämlich $= 0$ sein [zufolge des dritten Satzes].

Wir gelangen somit zu folgendem Resultate:

Satz. — *Ist ε die Dichtigkeit und M die Gesamtmasse derjenigen elektrischen Oberflächenbelegung, welche auf einem gegebenen Conductor unter der Einwirkung irgend welcher von Aussen her einwirkender Kräfte entsteht, so gelten die Formeln:*

$$(A.) \quad \int \varepsilon d\sigma = M,$$

$$(B.) \quad F_i + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} = G,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der Conductoroberfläche. Dabei bezeichnet i jeden beliebigen Punkt innerhalb des Conductors, ferner F_i das Potential jener gegebenen äusseren Kräfte in Bezug auf den Punkt i , ferner E_i den Abstand des Punktes i vom Elemente $\varepsilon d\sigma$, und endlich G eine Constante, den sogenannten Potentialwerth des Conductors.

Zusatz. — *Ist der Conductor isolirt, so wird M bekannt sein, nämlich identisch sein mit der dem Conductor von Hause aus zuertheilten elektrischen Ladung. Andererseits aber wird G unbekannt sein.*

Denkt man sich hingegen den Conductor zur Erde abgeleitet, so wird umgekehrt M unbekannt, und G bekannt sein. Es ist nämlich in diesem Fall $G = 0$.

Analoge Formeln ergeben sich in analoger Weise für ein System von mehreren Conductoren. Sind z. B. zwei Conductoren \mathcal{C} und \mathcal{C}'

gegeben, auf welche von Aussen her *gegebene Kräfte* einwirken, so erhält man folgende Formeln:

$$(\Gamma.) \quad \int \varepsilon d\sigma = M,$$

$$(\Delta.) \quad \int \varepsilon' d\sigma' = M',$$

$$(E.) \quad F_i + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} + \int \frac{\varepsilon' d\sigma'}{E_i'} = G,$$

$$(Z.) \quad F_j + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_j} + \int \frac{\varepsilon' d\sigma'}{E_j'} = G'.$$

Hier bezeichnen ε , ε' die Dichtigkeiten und M , M' die Gesamtmassen der auf den beiden Conductoroberflächen entstehenden elektrischen Belegungen. Ferner bezeichnet F_i das Potential der *gegebenen äusseren Kräfte* in Bezug auf einen Punkt i , der innerhalb des Conductors \mathcal{C} jede beliebige Lage annehmen darf; und ebenso bezeichnet F_j das Potential jener Kräfte in Bezug auf irgend einen Punkt j innerhalb des Conductors \mathcal{C}' . Selbstverständlich sind E_i und E_j die Abstände der Punkte i und j vom Element $\varepsilon d\sigma$, und ebenso E_i' und E_j' die Abstände derselben vom Element $\varepsilon' d\sigma'$. Ueberdies repräsentiren G und G' zwei *Constanten*, die sogenannten *Potentialwerthe* der beiden Conductoren.

§ 3.

Betrachtung einer gleichmässig mit Masse belegten Kreisfläche.

Wir sind im vorhergehenden Paragraph zur Vorstellung *unendlich dünner materieller Oberflächenschichten* geführt worden. Und es wird daher, bevor wir in der Theorie der Elektrostatik weitergehen, zweckmässig sein, zuvörderst derartige *Oberflächenschichten* oder *Oberflächenbelegungen* ganz im Allgemeinen zu betrachten, und die Kräfte und Potentiale derselben näher zu untersuchen. Dabei wird es gleichgültig sein, ob die zu betrachtende Fläche *geschlossen* oder *ungeschlossen* ist, und ebenso auch gleichgültig sein, ob die Belegung dieser Fläche aus *elektrischer* oder *magnetischer* Materie besteht.

Wir werden die Einwirkung einer solchen Belegung auf irgend einen Punkt m untersuchen, indem wir dabei diesen Punkt als einen *elektrischen* oder *magnetischen* Massenpunkt uns vorstellen, jenachdem jene Belegung eine *elektrische* oder *magnetische* ist. Demgemäss ist der in (4.) pg. 3 eingeführte Factor f bei unsern gegenwärtigen Untersuchungen durchweg $= 1$ zu setzen; so dass also die Formeln (4.) pg. 3 und (12.), (15.) pg. 5 die Gestalt annehmen:

$$(a.) \quad \Re = \frac{m\mu}{E^2};$$

$$(b.) \quad \begin{cases} R \cos(R, x) = -m \frac{\partial V}{\partial x}, \\ R \cos(R, y) = -m \frac{\partial V}{\partial y}, \\ R \cos(R, z) = -m \frac{\partial V}{\partial z}; \end{cases}$$

$$(c.) \quad R \cos(R, p) = -m \frac{dV}{dp};$$

dabei bezeichnet V das Potential:

$$(d.) \quad V = \sum \frac{\mu}{E}.$$

Ist die gegebene Fläche *geschlossen*, so kann man unmittelbar von ihrer *äussern* und *innern* Seite sprechen. Ist sie *ungeschlossen*, so mag ganz nach Belieben *irgend eine* der beiden Seiten als die *äussere*, mithin die andere als die *innere* Seite festgesetzt sein. Ferner mag jeder Punkt mit a , i oder o bezeichnet werden, je nachdem er auf der *äussern* Seite, auf der *innern*, oder auf der *Fläche selbst* sich befindet.

Wir beginnen mit einem möglichst einfachen Fall. Es sei eine *gleichmässig* mit Masse belegte *Kreisfläche* gegeben, und es soll die Kraft untersucht werden, mit welcher diese Fläche auf einen in ihrer *Axe**) gelegenen materiellen Punkt einwirkt. Dabei mag die Masse des sollicitirten Punktes *positiv*, $= 1$, und die Masse der Kreisfläche ebenfalls *positiv* sein; so dass also der Punkt von der Kreisfläche *abgestossen* wird.

Betrachten wir gleichzeitig *zwei* Punkte a und i , zu beiden Seiten der Kreisfläche, beide auf der *Axe* gelegen, und beide *gleich weit* von der Kreisfläche entfernt, so werden offenbar beide Punkte *gleich stark* von der Kreisfläche abgestossen werden; so dass also die auf a und i einwirkenden Kräfte *gleich gross* und *von entgegengesetzter Richtung* sind. Der gemeinschaftliche Werth k dieser beiden Kräfte wird, wie man leicht übersieht, sein *Maximum* K erreichen, sobald jene Punkte a und i von beiden Seiten her *unendlich nahe* an die Kreisfläche heranrücken.

Lässt man also die *Axe* der Kreisfläche mit der x -*Axe* eines rechtwinkligen Coordinatensystems zusammenfallen, der Art, dass diese x -*Axe* von i nach a geht, und bezeichnet man die auf die Punkte a

*) Unter der *Axe* der Kreisfläche ist das auf ihr im Centrum (nach beiden Seiten hin) errichtete Perpendikel zu verstehen.

und i in der Richtung dieser x -Axe einwirkenden Kräfte mit X_a und X_i , so erhält man im Allgemeinen die Formeln:

$$(1.) \quad X_a = k \quad \text{und} \quad X_i = -k,$$

und insbesondere für den Fall, dass a und i der Kreisfläche *unendlich nahe* liegen, folgende Formeln:

$$(2.) \quad \bar{X}_a = K \quad \text{und} \quad X_i = -K,$$

wo die horizontalen Striche andeuten sollen, dass die Punkte a und i der Kreisfläche *unendlich nahe* zu denken sind.

Bis jetzt haben wir uns den sollicitirten Punkt (a oder i) stets durch irgend welchen, wenn auch nur unendlich kleinen, Zwischenraum von der Kreisfläche getrennt gedacht. Nehmen wir nun aber an, dass dieser Zwischenraum *Null* sei, dass also der sollicitirte Punkt geradezu *in* der Kreisfläche, und zwar in ihrem Centrum o gelegen ist, so wird alsdann die auf den Punkt von Seiten der Kreisfläche ausgeübte Kraft X_o offenbar gleich *Null* sein; so dass also für a, o, i der Reihe nach die Formeln gelten:

$$(3.) \quad \bar{X}_a = K, \quad X_o = 0, \quad \bar{X}_i = -K.$$

Demgemäss erleidet also die Stärke der Kraft X , falls der sollicitirte Punkt längs der x -Axe durch die Kreisfläche hindurch geht, einen *doppelten Sprung*, indem sie in den auf einander folgenden drei Augenblicken, wo der sollicitirte Punkt dicht unterhalb o , in o selber, und dicht oberhalb o sich befindet, respective $= -K$, $= 0$ und $= +K$ ist.

Nachdem eine solche sprungweise Aenderung der ausgeübten Kraft für die *Kreisfläche* constatirt ist, unterliegt es keinem Zweifel, dass Analoges auch bei *andern* Flächen der Fall sein wird. Wir werden in dieser Beziehung zuvörderst noch ein zweites Beispiel, das der *Kugelfläche*, behandeln.

§ 4.

Betrachtung einer gleichmässig mit Masse belegten Kugelfläche.

Es sei eine *gleichmässig* mit Masse belegte *Kugelfläche* gegeben. Die auf irgend einem Element $d\omega$ dieser Fläche vorhandene Masse mag $= \varepsilon d\omega$ gesetzt, und der Factor ε die *Flächendichtigkeit* genannt werden. Dieses ε wird alsdann, weil die Belegung der Kugelfläche *gleichmässig* sein soll, eine *Constante* sein.



Befindet sich nun [vgl. die Figur] in a ein materieller Punkt von der Masse $Eins$, so wird die von dem Element $\varepsilon d\omega$ auf diesen Punkt ausgeübte Kraft P die Stärke besitzen:

$$(1.) \quad P = \frac{1 \cdot \varepsilon d\omega}{E^2}, \quad [\text{vgl. (a.) pg. 163}],$$

wo E den Abstand jenes Punktes vom Element $\varepsilon d\omega$ vorstellt. Die Componente der Kraft P nach der *Normale* n (d. i. nach dem Kugelradius $Ooan$) hat daher den Werth:

$$(2.) \quad P \cos \delta = \frac{\cos \delta \cdot \varepsilon d\omega}{E^2},$$

wo δ den Neigungswinkel der Kraft P gegen n vorstellt.

Nimmt man nun das Kugelcentrum O zum Anfangspunkt, und die Normale n zur Axe eines Polarcordinatensystems, und bezeichnet man den Kugelradius mit A , die Centraldistanz des Punktes a mit r , ferner die Polarcordinaten des Elementes $\varepsilon d\omega$ mit ϑ, φ , und setzt man überdies $\cos \vartheta = \mu$, so ergibt sich:

$$(3.) \quad d\omega = A^2 d\mu d\varphi,$$

$$(4.) \quad \cos \delta = \frac{r - A \cos \vartheta}{E} = \frac{r - A\mu}{E},$$

$$(5.) \quad E^2 = r^2 + A^2 - 2rA\mu;$$

so dass also die Formel (2.) übergeht in:

$$(6.) \quad P \cos \delta = \frac{r - A\mu}{E} \frac{\varepsilon A^2 d\mu d\varphi}{E^2}.$$

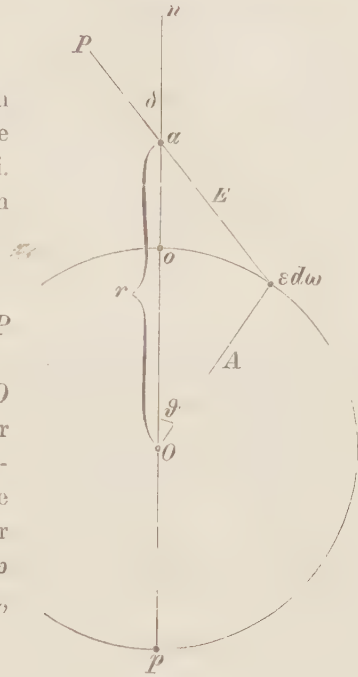
Hieraus ergibt sich durch Integration die von der *ganzen* Kugelfläche auf den Punkt a in der Richtung n ausgeübte Kraft N_a :

$$(7.) \quad N_a = \varepsilon A^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{(r - A\mu) d\mu d\varphi}{E^3},$$

oder, falls man die Integration nach φ wirklich ausführt:

$$(8.) \quad N_a = 2\pi \varepsilon A^2 \int_{-1}^{+1} \frac{(r - A\mu) d\mu}{E^3}.$$

Um dieses Integral zu berechnen, mag E , an Stelle von μ , als Integrationsvariable eingeführt werden. Alsdann gelangt man, mit Rücksicht auf die aus (5.) entspringenden Gleichungen:



$$EdE = -rAd\mu, \quad A\mu = \frac{r^2 + A^2 - E^2}{2r}, \quad r - A\mu = \frac{r^2 - A^2 + E^2}{2r},$$

zu folgender Formel:

$$(9.) \quad N_a = \frac{\pi \varepsilon A}{r^2} \int_{E=(ap)}^{E=(ao)} \left(\frac{r^2 - A^2}{E^2} + 1 \right) (-dE),$$

wo $E=(ap)$ und $E=(ao)$ die Entfernungen des Punktes a respective von p und o vorstellen [vgl. die Figur]. Führt man jetzt endlich in (9.) die Integration wirklich aus, so erhält man:

$$(10.) \quad N_a = \frac{\pi \varepsilon A}{r^2} \left[\frac{r^2 - A^2}{E} - E \right]_{E=(ap)=r+A}^{E=(ao)=r-A};$$

das hier auftretende r ist, nach seiner Definition, $= (Oa)$, und repräsentirt also die Centraldistanz des Punktes a .

Analoge Formeln ergeben sich, wie leicht zu übersehen ist, auch dann, wenn der sollicitirte Punkt nicht in a , sondern in o oder i liegt [vgl. die nebenstehende Figur]. Lässt man denselben z. B. nach o rücken, seine Centraldistanz r also übergehen in den Kugelradius A , so erhält man, an Stelle von (10.), folgende Formel:

$$(11.) \quad N_o = \frac{\pi \varepsilon A}{A^2} [0 - E]_{E=(op)=2A}^{E=(oo)=0}.$$

Und lässt man endlich jenen Punkt nach i rücken, so ergibt sich, an Stelle von (10.), folgende Formel:

$$(12.) \quad N_i = \frac{\pi \varepsilon A}{r^2} \left[\frac{r^2 - A^2}{E} - E \right]_{E=(ip)=A+r}^{E=(io)=A-r},$$

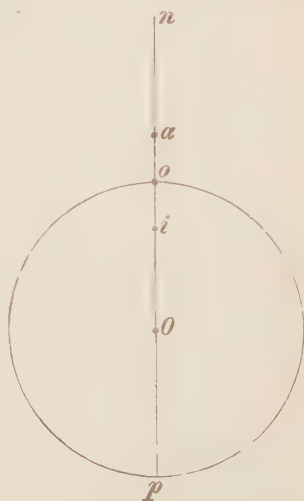
wo r den Centralabstand des Punktes i vorstellt, mithin $= (Oi)$ ist.

Die Formeln (10.), (11.), (12.) gewinnen schliesslich, falls man die daselbst nur angedeuteten Differenzen wirklich bildet, folgendes Aussehen:

$$(13.) \quad N_a = \frac{4\pi \varepsilon A^2}{r^2}, \quad N_o = 2\pi \varepsilon, \quad N_i = 0.$$

Hieraus aber ergeben sich, falls man die Punkte a und i von beiden Seiten her *unendlich nahe* an o heranschiebt, mithin r in A übergehen lässt, und die so sich ergebenden Grenzwerte von N_a und N_i mit \overline{N}_a und \overline{N}_i bezeichnet, folgende weitere Formeln:

$$(14.) \quad \overline{N}_a = 4\pi \varepsilon, \quad \overline{N}_o = 2\pi \varepsilon, \quad \overline{N}_i = 0.$$



Diese Formeln (14.) zeigen, dass die von der Kugelfläche auf einen materiellen Punkt ausgeübte Kraft N , beim Durchgange des Punktes durch die Fläche, *zwei unmittelbar aufeinander folgende Sprünge* erleidet, nämlich *einen* Sprung in dem Augenblicke, wo der Punkt, aus dem Innenraum kommend, die Fläche selber erreicht, und den *zweiten* Sprung in dem Augenblicke, wo der Punkt die Fläche wieder verlässt, um in den Aussenraum hineinzufahren. Auch zeigen die Formeln (14.), dass beide Sprünge *gleich gross* sind, jeder $= 2\pi\varepsilon$.

Wir wollen zuvörderst an diese Formeln (14.) einige einfache Bemerkungen anschliessen lassen, die uns dann weiterhin den Weg bahnen werden zur Behandlung *beliebiger Flächen*.

Sich anschliessende Bemerkungen. — Denkt man sich die gegebene Kugelfläche durch ν äquidistante, von o nach p laufende Meridiane in ν congruente Flächenstreifen (Zweiecke) zerlegt, so werden offenbar all' diese ν Flächenstreifen zur Kraft N_a *gleich viel* beitragen. Bezeichnet man also irgend *einen* solchen Streifen mit σ , und die von ihm auf den Punkt a in der Richtung n ausgeübte Kraft mit $N_a^{(\sigma)}$, so ergibt sich:

$$N_a^{(\sigma)} = \frac{1}{\nu} N_a;$$

und ebenso erhält man

$$N_o^{(\sigma)} = \frac{1}{\nu} N_o, \quad \text{und} \quad N_i^{(\sigma)} = \frac{1}{\nu} N_i;$$

wo die $N^{(\sigma)}$ die speciell vom *Flächenstreifen* σ herrührenden Kräfte vorstellen, während die N (*ohne* obern Index) nach wie vor diejenigen Kräfte bezeichnen sollen, welche von der *ganzen Kugelfläche* hervorgebracht werden. Demgemäss erhält man aus (13.):

$$N_a^{(\sigma)} = \frac{4\pi\varepsilon A^2}{\nu r^2}, \quad N_o^{(\sigma)} = \frac{2\pi\varepsilon}{\nu}, \quad N_i^{(\sigma)} = 0,$$

und ferner aus (14.):

$$N_a^{(\sigma)} = \frac{4\pi\varepsilon}{\nu}, \quad N_o^{(\sigma)} = \frac{2\pi\varepsilon}{\nu}, \quad \overline{N_i^{(\sigma)}} = 0.$$

Denkt man sich die Zahl ν unendlich gross, so wird $\frac{2\pi}{\nu}$ denjenigen unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ repräsentiren, unter welchem die beiden den Streifen σ begrenzenden Meridiane im Punkte o oder p gegeneinander geneigt sind; so dass man also erhält:

$$N_a^{(\sigma)} = 2\varepsilon d\varphi, \quad N_o^{(\sigma)} = \varepsilon d\varphi, \quad \overline{N_i^{(\sigma)}} = 0,$$

und hieraus durch Subtraction:

$$(15.) \quad \overline{N_a^{(\sigma)}} - N_o^{(\sigma)} = +\varepsilon d\varphi, \quad \text{und} \quad \overline{N_i^{(\sigma)}} - N_o^{(\sigma)} = -\varepsilon d\varphi.$$

Denkt man sich jetzt den Flächenstreifen σ durch einen beliebigen Schnitt in zwei Dreiecke γ und δ zerlegt, und die von diesen Dreiecken ausgeübten normalen Componenten respective mit $N^{(\gamma)}$ und $N^{(\delta)}$ bezeichnet, so wird offenbar $N^{(\gamma)}$ beim Uebergange des materiellen Punktes von i nach o nach a sich Schritt für Schritt in *stetiger* Weise ändern. Denn jener Punkt bleibt ja, bei der Bewegung ioa , von dem einwirkenden Dreiecke γ beständig durch beträchtliche Entfernungen getrennt. Aus dieser Stetigkeit von $N^{(\gamma)}$ ergeben sich sofort die Formeln:

$$(16.) \quad \overline{N_a^{(\gamma)}} - N_o^{(\gamma)} = 0 \quad \text{und} \\ \overline{N_i^{(\gamma)}} - N_o^{(\gamma)} = 0.$$

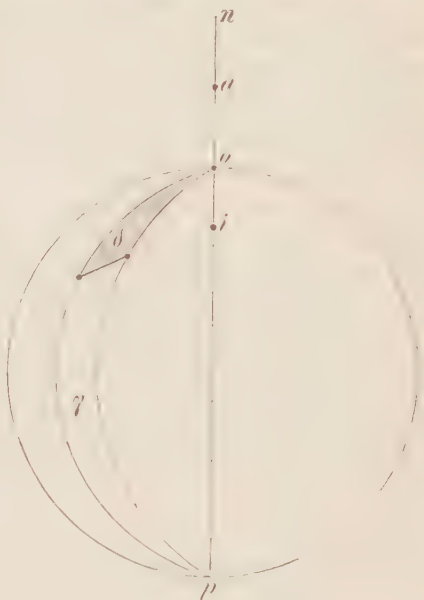
Subtrahirt man aber diese Formeln (16.) von den Formeln (15.) und beachtet man dabei, dass

$$N^{(\sigma)} - N^{(\gamma)} = N^{(\delta)}$$

ist, so ergibt sich:

$$(17.) \quad \overline{N_a^{(\delta)}} - N_o^{(\delta)} = + \varepsilon d\varphi, \quad \text{und} \quad \overline{N_i^{(\delta)}} - N_o^{(\delta)} = - \varepsilon d\varphi,$$

wo $d\varphi$ (nach wie vor) den Winkel des Dreiecks δ an der Ecke o repräsentirt, während ε die *constante* Flächendichtigkeit dieses Dreiecks bezeichnet.



§ 5.

Betrachtung einer beliebig gegebenen Fläche, die gleichmässig oder ungleichmässig, jedoch in stetiger Weise mit Masse belegt ist.

Es sei eine beliebige *stetig gekrümmte* Fläche gegeben, geschlossen oder ungeschlossen; und diese Fläche sei der Art mit Masse belegt, dass die *Flächendichtigkeit* ε von einer Stelle der Fläche zur andern in *stetiger Weise* variirt. Ferner sei o ein auf der Fläche (jedoch, falls sie ungeschlossen sein sollte, *nicht* hart am Rande derselben) markirter Punkt. Ueberdies mögen i und a zwei Punkte vorstellen auf der durch o gehenden Normale, die beide sehr nahe an o liegen, und von denen i auf der innern, a auf der äussern Seite der Fläche sich befindet. Auch mag jene Normale, in der Richtung ioa , mit n bezeichnet sein.

Der grössern Allgemeinheit willen mag angenommen werden, dass der materielle Punkt a oder o oder i nicht nur von der materiellen Fläche selber, sondern überdies noch von irgend welchen andern Massen \mathfrak{M} sollicitirt werde, von denen wir nur voraussetzen, dass sie von der Fläche durch irgend welche Abstände getrennt sind. Es handelt sich darum, die von der Fläche selbst und diesen Massen \mathfrak{M} auf jenen Punkt ausgeübte *Gesamtwirkung*, oder vielmehr die der Normale n entsprechende Componente N dieser Gesamtwirkung näher zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke zerlegen wir zuvörderst die Fläche durch eine um o herumlaufende Curve in zwei Theile κ und λ ; der Art, dass der den Punkt o enthaltende Theil κ *unendlich klein* ist. Die Flächendichtigkeit ε wird alsdann innerhalb κ als *constant*, nämlich als identisch mit demjenigen Werthe ε_o , anzusehen sein, den sie im Punkte o besitzt.



Wäre der Krümmungsradius der gegebenen Fläche im Punkte o für alle durch o gelegten Normalschnitte *derselbe*, so würde jenes den Punkt o umgebende Flächenelement κ unmittelbar als ein *Theil einer Kugelfläche* anzusehen sein, deren Radius identisch wäre mit dem gemeinschaftlichen Werthe jener Krümmungsradien.

Im Allgemeinen ist das *nicht* der Fall. Doch wird der Werth des Krümmungsradius von einem Normalschnitt zum andern in *stetiger* Weise variiren. Und demgemäss wird wenigstens derjenige *Theil* von κ , welcher zwischen zwei auf einander folgenden Normalschnitten liegt, als Theil einer Kugelfläche d. i. als ein *sphärisches Dreieck* anzusehen sein. Denkt man sich nun das Element κ durch die in unendlich kleinen Winkeldistanzen auf einander folgenden Normalschnitte in lauter solche unendlich schmale sphärische Dreiecke zerlegt, und irgend eines derselben mit δ bezeichnet, so sind die Formeln (17.) pg. 168 auf dieses Dreieck δ sofort anwendbar; so dass man also erhält:

$$(1.) \quad \overline{N}_a^{(\delta)} - N_o^{(\delta)} = + \varepsilon_o d\varphi, \quad \text{und} \quad \overline{N}_i^{(\delta)} - N_o^{(\delta)} = - \varepsilon_o d\varphi,$$

wo $d\varphi$ den Winkel des Dreiecks bei der Ecke o vorstellt, während ε_o die constante Flächendichtigkeit von κ oder δ , oder (was dasselbe ist) den Werth der Flächendichtigkeit im Punkte o bezeichnet.

Bildet man die Gleichungen (1.) der Reihe nach für *all'* jene Dreiecke δ , in welche κ zerlegt worden ist, so gelangt man durch Addition *all'* dieser Gleichungen zu folgenden Formeln:

$$(2.) \quad \overline{N}_a^{(\kappa)} - N_o^{(\kappa)} = + \varepsilon_o 2\pi, \quad \text{und} \quad \overline{N}_i^{(\kappa)} - N_o^{(\kappa)} = - \varepsilon_o 2\pi,$$

wo $N_a^{(\kappa)}$, $N_o^{(\kappa)}$, $N_i^{(\kappa)}$ die vom Flächentheile κ herrührenden Normalcomponenten vorstellen.

Der *andere* Flächentheil λ bleibt, falls der materielle Punkt längs n von i über o nach a geht, von diesem Punkte stets durch irgend welche Entfernungen getrennt. Die von λ ausgeübte Normalcomponente $N^{(\lambda)}$ wird sich also während jener Bewegung *in* a Schritt für Schritt in *stetiger* Weise ändern. Demgemäss ist:

$$(3.) \quad \overline{N}_a^{(\lambda)} - N_o^{(\lambda)} = 0, \quad \text{und} \quad \overline{N}_i^{(\lambda)} - N_o^{(\lambda)} = 0.$$

Und ebenso ergeben sich, was die von den Massen \mathfrak{M} herrührende Normalcomponente $N^{(\mathfrak{M})}$ betrifft, die analogen Formeln:

$$(4.) \quad \overline{N}_a^{(\mathfrak{M})} - N_o^{(\mathfrak{M})} = 0, \quad \text{und} \quad \overline{N}_i^{(\mathfrak{M})} - N_o^{(\mathfrak{M})} = 0.$$

Addirt man schliesslich die Formeln (2.), (3.), (4.), und beachtet, dass

$$N^{(\kappa)} + N^{(\lambda)} + N^{(\mathfrak{M})} = N$$

ist, wo N die Normalcomponente der eigentlich zu untersuchenden *Gesamtwirkung* vorstellt, so erhält man:

$$(5.) \quad \overline{N}_a - N_o = + 2\pi\varepsilon_o, \quad \text{und} \quad \overline{N}_i - N_o = - 2\pi\varepsilon_o,$$

oder, ein wenig anders geschrieben:

$$(6.) \quad \begin{aligned} N_a &= N_o + 2\pi\varepsilon_o, \\ \overline{N}_i &= N_o - 2\pi\varepsilon_o. \end{aligned}$$

Diese Formeln lassen sich leicht noch weiter vervollständigen. Bezeichnet man nämlich das *Potential* der in Rede stehenden (von der Fläche und den Massen \mathfrak{M} ausgeübten) *Gesamtwirkung* mit V , und den Werth desselben für die Punkte a und i respective mit V_a und V_i , so ist offenbar*):

$$(7.) \quad \begin{aligned} N_a &= - \frac{dV_a}{dn}, \\ N_i &= - \frac{dV_i}{dn}. \end{aligned}$$

Auch werden diese Formeln (7.) gültig bleiben, wie nahe man auch die Punkte a und i an o heranrücken lässt. Demgemäss ergibt sich:

*) Es ergeben sich nämlich diese Formeln aus (c.) pg. 163, falls man nur beachtet, dass die Masse des sollicitirten Punktes = 1 sein soll.

$$(8.) \quad \begin{aligned} N_a &= -\frac{dV_a}{dn}, \\ N_i &= \frac{dV_i}{dn}, \end{aligned}$$

somit gelangt man schließlich, durch Zusammenfassung der Formeln (6.), (8.), zu folgendem Resultate:

Erster Satz. — Eine stetig gekrümmte Fläche sei in stetiger Weise mit Masse belegt; und überdies seien irgendwo im Raume, jedoch entfernt von der Fläche, irgend welche Massen M gegeben. Bezeichnet man alsdann das Potential der von der Fläche

ausgehenden Massen M auf einen variablen Punkt ausgeübten Gesamtwirkung mit V , und die der Normale n entsprechende Componente dieser Gesamtwirkung mit N , so gelten die Formeln:

$$(9.) \quad \begin{aligned} -\frac{dV_a}{dn} &= N_a = N_o + 2\pi\epsilon_o, \\ \frac{dV_i}{dn} &= N_i = N_o - 2\pi\epsilon_o, \end{aligned}$$

wo die Punkte a, o, i die in der Figur angegebene Lage haben sollen, und wo ϵ_o den Werth der Flächendichtigkeit im Punkte o vorstellt.

Aus den Formeln (9.) folgt durch Addition:

$$(10.) \quad -\left(\frac{dV_a}{dn} + \frac{dV_i}{dn}\right) = 2N_o$$

und andererseits durch Subtraction:

$$(11.) \quad -\left(\frac{dV_a}{dn} - \frac{dV_i}{dn}\right) = 4\pi\epsilon_o.$$

Die letzte dieser Formeln zeigt, wie man, falls das Potential V bekannt ist, hieran die Dichtigkeit ϵ der Flächenbelegung zu berechnen vermag.

§ 6.

Ueber das Potential einer mit Masse belegten Fläche in Bezug auf einen variablen Punkt.

Der allgemeinen Untersuchung mag, ähnlich wie früher, die Betrachtung einer *gleichmäßig* mit Masse belegten *Kugelfläche* vorausgeschickt werden. Hält man fest an den früher (pg. 165) für diesen Fall eingeführten Bezeichnungen, so ergibt sich sofort:

$$V_a = \varepsilon A^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu d\varphi}{E},$$

oder, falls man die Integration nach φ wirklich ausführt:

$$V_a = 2\pi\varepsilon A^2 \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{E},$$

wo V_a das Potential der Kugelfläche in Bezug auf den Punkt a vorstellt, und wo $E^2 = r^2 + A^2 - 2rA\mu$ ist. Führt man nun E , an Stelle von μ , als Integrationsvariable ein, so erhält man:

$$V_a = \frac{2\pi\varepsilon A}{r} \int_{E_p=(ap)}^{E_o=(ao)} (-dE),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\alpha.) \quad V_a = \frac{2\pi\varepsilon A}{r} ((ap) - (ao)) = \frac{4\pi\varepsilon A^2}{r}.$$

In analoger Weise ergibt sich offenbar das auf den Flächenpunkt o ausgeübte Potential:

$$(\beta.) \quad V_o = \frac{2\pi\varepsilon A}{A} ((op) - (oo)) = 4\pi\varepsilon A,$$

und ferner das dem innern Punkte i entsprechende Potential:

$$(\gamma.) \quad V_i = \frac{2\pi\varepsilon A}{r} ((ip) - (io)) = 4\pi\varepsilon A.$$

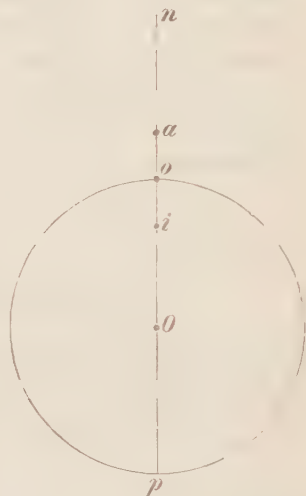
Aus $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ folgt nun weiter, falls man die Punkte a und i unendlich nahe an o herandrücken, mithin die Centraldistanzen r dieser Punkte in A übergehen lässt:

$$(\delta.) \quad \overline{V}_a = 4\pi\varepsilon A, \quad V_o = 4\pi\varepsilon A, \quad \overline{V}_i = 4\pi\varepsilon A,$$

mithin:

$$(\varepsilon.) \quad \overline{V}_a = V_o = \overline{V}_i.$$

Von diesen Formeln $(\delta.)$, $(\varepsilon.)$ aus kann man nun Schritt für Schritt in derselben Weise operiren, wie früher von den Formeln (14.) pg. 166 aus, indem man zunächst zur Betrachtung eines zwischen zwei Meridianen liegenden Kugelflächenstreifens σ , sodann zur Betrachtung eines sphärischen Dreiecks δ , und endlich zur Untersuchung *beliebiger Flächen* übergeht. Man gelangt in solcher Weise, wie leicht zu übersehen ist, zu folgendem Resultate:



Zweiter Satz. — Eine stetig gekrümmte Fläche sei in stetiger Weise mit Masse belegt; und überdies seien irgendwo im Raume, jedoch entfernt von der Fläche, irgend welche Massen \mathfrak{M} gegeben. Bezeichnet man alsdann das von der Fläche selber und von jenen Massen \mathfrak{M} auf einen variablen Punkt ausgeübte Potential mit V , so gilt stets die Formel:

$$(12.) \quad \overline{V}_a = V_o = \overline{V}_i,$$

wo die Punkte a, o, i die in der Figur angegebene Lage besitzen.

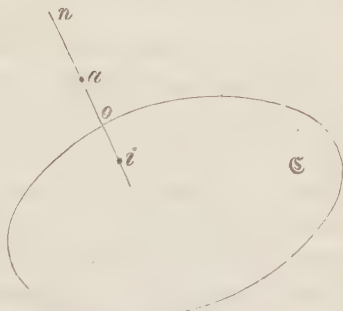
Dieses Potential V der in Rede stehenden Gesamtwirkung ändert sich also beim Durchgange durch die Fläche Schritt für Schritt in stetiger Weise; während [vgl. (9.)] die normale Componente N der Gesamtwirkung bei einem solchen Durchgange zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Sprünge erleidet.

§ 7.

Anwendung der Sätze der beiden vorhergehenden Paragraphen auf die Theorie der elektrischen Vertheilung.

Sind beliebig viele elektrisch geladene Conductoren und Isolatoren $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'',$ etc. und $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}', \mathfrak{I}'',$ etc. gegeben, so wird das elektrische Gesamtpotential V , nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, im Innern eines jeden Conductors constant sein, etwa $= G$ innerhalb \mathfrak{C} , ferner $= G'$ innerhalb \mathfrak{C}' , u. s. w. Auch werden die einzelnen Conductoren $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'',$ etc. zur Zeit des Gleichgewichtszustandes, mit gewissen elektrischen Belegungen $(\epsilon), (\epsilon'), (\epsilon''), \dots$ behaftet sein, während im Innern derselben nur *neutrale* Elektrizität sich vorfindet.

Betrachtet man also z. B. einen variablen Punkt, der nahe an der Oberfläche des Conductors \mathfrak{C} bald in a , bald in o , bald in i sich befindet, und bezeichnet man die auf diesen Punkt von allen elektrischen Massen des ganzen Systems ausgeübte Gesamtwirkung mit R , ferner die der Normale n entsprechende Componente dieser Gesamtwirkung mit N , so werden R und N theils herrühren von der auf \mathfrak{C} vorhandenen elektrischen Oberflächenbelegung (ϵ) , anderntheils von denjenigen elektrischen Massen \mathfrak{M} , die in allen übrigen Körpern des Systems (d. i. in $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'',$ etc. und $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}', \mathfrak{I}'',$ etc.) zusammengekommen vorhanden sind. Gleiches gilt von V . Demgemäss sind die Sätze (9.), (10.), (11.), (12.) auf den vorliegenden Fall ohne Weiteres anwendbar. Man erhält also z. B. nach (9.):



$$(13.) \quad -\frac{dV_a}{dn} = \overline{N}_a = N_o + 2\pi\epsilon_o,$$

$$(14.) \quad -\frac{dV_i}{dn} = \overline{N}_i = N_o - 2\pi\epsilon_o,$$

wo ϵ_o die Dichtigkeit der Belegung (ϵ) im Punkte o vorstellt, und ferner nach (12.):

$$(15.) \quad \overline{V}_a = V_o = \overline{V}_i.$$

Nun ist aber, was die Formel (14.) betrifft:

$$V_i = \text{Const.}, = G, \text{ mithin } \frac{dV_i}{dn} = 0, \text{ also auch } \frac{dV_i}{dn} = 0.$$

Und mit Rücksicht hierauf folgt aus (14.) sofort:

$$(16.) \quad N_i = 0, \text{ und } N_o = 2\pi\epsilon_o,$$

also, falls man diesen Werth von N_o in (13.) substituirt:

$$(17.) \quad -\frac{dV_a}{dn} = \overline{N}_a = 4\pi\epsilon_o.$$

Durch Zusammenfassung dieser Resultate (15.), (16.), (17.) gelangt man zu folgendem Satze:

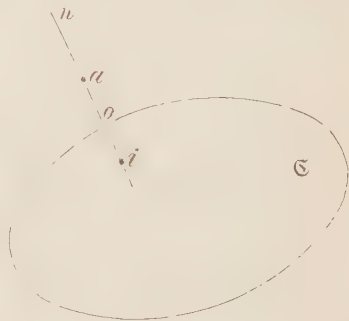
Satz. — *Betrachtet man irgend ein System elektrisch geladener Conductoren und Isolatoren nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes, so gelten an der Oberfläche eines jeden Conductors \mathfrak{C} folgende Formeln:*

$$(18.) \quad \overline{V}_a = V_o = \overline{V}_i,$$

$$(19.) \quad \frac{dV_a}{dn} = -4\pi\epsilon_o,$$

$$(20.) \quad \overline{N}_a = 4\pi\epsilon_o, \quad N_o = 2\pi\epsilon_o, \quad \overline{N}_i = 0.$$

Dabei bezeichnet V das Potential und N die normale Componente derjenigen elektrischen Gesamtwirkung, welche von Seiten des ganzen Systems auf einen variablen, bald in a , bald in o , bald in i zu denkenden Punkt ausgeübt wird. Ferner bezeichnet ϵ_o die Dichtigkeit der auf dem Conductor \mathfrak{C} vorhandenen elektrischen Belegung an der Stelle o .



Beiläufige Bemerkung. — Denkt man sich die betrachteten Conductoren \mathfrak{C} , \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' , ... von Luft umgeben, so wird die in dieser Luft vorhandene neutrale Elektrizität durch die Einwirkung der Conductoren allmählich zersetzt, und ein Theil dieser zersetzten Elektrizität in die Conductoren hineingezogen werden.

Repräsentirt z. B. die vorstehende Figur die Oberfläche des Conductors \mathfrak{C} , ferner a irgend ein in der Nähe dieses Conductors befindliches Lufttheilchen, und bezeichnet man die beiden in a enthaltenen einander neutralisirenden Elektricitätsmengen mit m und m' (wo $m' = -m$), so werden die auf m und m' in der Richtung n ausgeübten Kräfte N und N' , zufolge (20), die Werthe haben:

$$N = 4\pi\epsilon_0 m, \quad N' = 4\pi\epsilon_0 m'.$$

Denkt man sich also die Bezeichnung m, m' so gewählt, dass m und ϵ_0 gleiches (mithin m' und ϵ_0 verschiedenes) Vorzeichen haben, so wird N positiv, und N' negativ sein. Die mit ϵ_0 *gleichartige* Elektricität des Lufttheilchens wird also von der Oberfläche *abgestossen*, während die mit ϵ_0 *ungleichartige* zu derselben *hingezogen* wird. Diese letztere wird daher in den Conductor *hineinfahren*, und die dort bereits vorhandene Elektricität zu einem gewissen Theile *neutralisiren*. Die diese Neutralisirung bewirkenden Kräfte N, N' sind aber proportional der Flächendichtigkeit ϵ_0 . Und dies stimmt mit der Erfahrungsthatsache überein, dass der Verlust eines Conductors an Elektricität der Dichtigkeit derselben proportional ist.

§ 8.

Ueber die elektrische Dichtigkeit an der Berührungsstelle zweier Conductoren.

Zwei mit Elektricität beliebig geladene Conductoren \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' mögen einander *berühren*, wobei dahingestellt sein mag, ob die Berührungsstelle ein Punkt, eine Linie oder eine Fläche ist. Es soll die elektrische Belegung dieser Conductoren zur Zeit des Gleichgewichtszustandes näher untersucht werden, namentlich die Dichtigkeit dieser Belegung an der Berührungsstelle.

Wir wollen uns zuvörderst die Belegung der Berührungsstelle als eine Superposition *zweier* Belegungen vorstellen, von denen die *eine* dem einen, die *andere* dem andern Conductor zugehört. Diese Trennung der an der Berührungsstelle wirklich vorhandenen Belegung in zwei Theile mag in willkürlicher Weise geschehen, jedoch so, dass, nach Ausführung derselben, die dem *einen* Conductor zugehörige elektrische Oberflächenbelegung eine überall *stetige* Dichtigkeit besitzt, und Gleiches auch gilt von der Belegung des *andern* Conductors.

Wir bezeichnen diese *idealen* Belegungen der beiden Conductoren, was die Dichtigkeiten betrifft, mit η und η' , ferner die Werthe, welche η und η' an der Berührungsstelle o besitzen, mit η_o und η'_o . Alsdann wird die *in Wirklichkeit* an der Stelle o vorhandene elektrische Dichtigkeit ϵ_o gleich der *Summe* von η_o und η'_o sein:

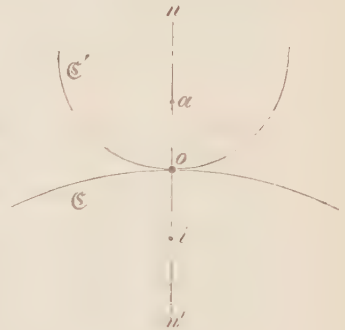
$$(A.) \quad \epsilon_o = \eta_o + \eta'_o.$$

Es handelt sich darum, den Werth von ϵ_o näher zu bestimmen.

Auf den Conductor \mathfrak{C} und seine ideale Belegung (η) ist der Satz pg. 171 ohne Weiteres anwendbar. Demgemäss ergeben sich die Formeln:

$$(B.) \quad \begin{aligned} \overline{N}_a &= N_o + 2\pi\eta_o, \\ \overline{N}_i &= N_o - 2\pi\eta_o, \end{aligned}$$

wo unter den N 's diejenigen Kräfte zu verstehen sind, welche in der Richtung n oder ioa ausgeübt werden von jener auf dem Conductor \mathfrak{C} gedachten idealen Belegung (η). Dabei soll unter n die in der Berührungsstelle o der beiden Conductoren errichtete *Normale* der beiden Conductoroberflächen, und zwar die *äussere* Normale des Conductors \mathfrak{C} verstanden sein.



Analoge Formeln gelten offenbar für den Conductor \mathfrak{C}' :

$$(B'.) \quad \begin{aligned} N'_i &= N'_o + 2\pi\eta'_o, \\ \overline{N'_a} &= N'_o - 2\pi\eta'_o, \end{aligned}$$

wo unter den Kräften N' diejenigen verstanden sind, welche in der zu n entgegengesetzten Richtung n' ausgeübt werden von der idealen Belegung (η') des Conductors \mathfrak{C}' . Dass die Punkte a und i beim Uebergange von den Formeln (B.) zu (B'.) vertauscht werden mussten, bedarf kaum noch der Erläuterung. Ebenso nämlich wie a einen Aussenpunkt von \mathfrak{C} vorstellt, ebenso repräsentirt i einen Aussenpunkt des *andern* Conductors \mathfrak{C}' . U. s. w.

In Wirklichkeit wirken auf die betrachteten Punkte *beide* Conductoren ein. Die in Wirklichkeit auf den Punkt a in der Richtung n einwirkende Kraft wird daher $= N_a - N'_a$ sein, und ebenso wird die in dieser Richtung auf i influirende Kraft $= N_i - \overline{N'_i}$ sein. Diese in Wirklichkeit vorhandenen Kräfte müssen aber, weil Gleichgewicht vorhanden sein soll, den Werth Null haben. Demgemäss ergeben sich, mit Rücksicht auf (B.), (B'.), die Formeln:

$$(C.) \quad \begin{aligned} \overline{N}_a - \overline{N'_a} &= (N_o - N'_o) + 2\pi(\eta_o + \eta'_o) = \text{Null}, \\ \overline{N}_i - \overline{N'_i} &= (N_o - N'_o) - 2\pi(\eta_o + \eta'_o) = \text{Null}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$(D.) \quad N_o - N'_o = 0,$$

und andererseits durch Subtraction:

$$(E.) \quad \eta_o + \eta'_o = 0,$$

also mit Rücksicht auf (A.):

$$(F.) \quad \epsilon_0 = 0;$$

so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

An der Berührungsstelle zweier elektrisch geladener Conductoren ist zur Zeit des Gleichgewichts die Dichtigkeit der Elektricität stets = 0.

Dieser Satz gilt ganz allgemein, einerlei ob die beiden Conductoren sich selbst überlassen, oder ob sie dem Einflusse irgend welcher äusserer Kräfte ausgesetzt sind.

In der That wird man den Satz z. B. für den Fall, dass irgend ein elektrisch gemachter Isolator von Aussen her auf die beiden Conductoren einwirkt, in genau derselben Art, wie vorhin, zu beweisen im Stande sein.

§ 9.

Die elektrische Vertheilung auf einer isolirten Metallkugel unter der Einwirkung eines äussern elektrischen Massenpunktes.

Ist eine *isolirte* Metallkugel mit irgend welchem Quantum M freier Elektricität geladen, so entsteht an ihrer Oberfläche eine *überall gleichmässige* elektrische Belegung, d. h. eine Belegung von *constanter* Dichtigkeit*). Diese Gleichmässigkeit wird aber aufhören, sobald auf die Kugel von Aussen her irgend welche elektrische Kräfte einwirken.

Solche äusseren Kräfte mögen nun in der That vorhanden sein; und zwar mögen dieselben ausgehen von einem ausserhalb der Kugel fest aufgestellten elektrischen Massenpunkte M_1 . Es soll die *Dichtigkeit* ϵ der unter diesen Umständen auf der Kugeloberfläche entstehenden elektrischen Belegung, und ebenso auch der innerhalb der Kugel entstehende Potentialwerth G berechnet werden**). Zur Bestimmung dieser beiden Unbekannten ergeben sich aus unserer allgemeinen Theorie [vgl. (A.), (B.) pg. 161] die beiden Gleichungen:

*) Dass auf der Kugeloberfläche eine *elektrische Belegung* entsteht, folgt unmittelbar aus unsern allgemeinen Sätzen pg. 159; und dass diese Belegung eine *gleichmässige* ist, ergibt sich aus der Symmetrie, welche die Kugel in Bezug auf ihren Mittelpunkt besitzt.

**) An Stelle des Massenpunktes M_1 kann man sich ausserhalb der gegebenen Metallkugel auch eine *Schellackkugel* aufgestellt denken, deren Oberfläche durch Reiben überall gleich stark elektrisch gemacht, also mit einer *festen* elektrischen Belegung von *überall gleicher Dichtigkeit* versehen ist. Denn diese Belegung der Schellackkugel wird auf alle Punkte ausserhalb der Schellackkugel in genau derselben Weise einwirken, als wäre die ganze Masse der Belegung concentrirt im Mittelpunkte derselben. [Vgl. (7a.) pg. 13 und (α) pg. 172.]

$$(1.) \quad \int \varepsilon do = M,$$

$$(2.) \quad \frac{M_1}{E_i^1} + \int \frac{\varepsilon do}{E_i} = G,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente do der Kugeloberfläche. Dabei bezeichnet i einen Punkt, der innerhalb der Kugel jede beliebige Lage annehmen darf; und gleichzeitig bezeichnen E_i^1 und E_i die Abstände des Punktes i vom Massenpunkte M_1 und vom Element εdo .

Den Werth der unbekannten *Constanten* G kann man leicht dadurch finden, dass man den Punkt i in das Centrum der Kugel hinein schiebt. Alsdann nämlich geht die Gleichung (2.) über in:

$$\frac{M_1}{A_1} + \int_A \varepsilon do = G,$$

wo A den *Kugelradius*, und A_1 den *Centralabstand* des Punktes M_1 vorstellen. Diese letzte Gleichung aber gewinnt, mit Rücksicht auf (1.), die Gestalt:

$$(3.) \quad \frac{M_1}{A_1} + \frac{M}{A} = G;$$

und liefert also, weil M, M_1 und A, A_1 gegeben sind, den Werth von G .

Was nun ferner die unbekannte *Dichtigkeit* ε betrifft, so führe man ein Polarcoordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt O im Centrum der Kugel liegt, und dessen *Axe* durch den Punkt M_1 geht. Sodann bezeichne man in diesem System die Polarcoordinaten des Flächenelementes do mit (A, ϑ, φ) oder (A, μ, φ) , wo $\mu = \cos \vartheta$ sein soll, setze also:

$$(4.) \quad do = A^2 d\mu d\varphi.$$

Ueberdies denke man sich die an der Stelle $do(A, \mu, \varphi)$ vorhandene Dichtigkeit ε , welche eine unbekannte Function von μ, φ ist, entwickelt nach Kugelfunctionen:

$$(5.) \quad \varepsilon = \sum_0^{\infty} Y_n(\mu, \varphi).$$

Die beiden Grundgleichungen (1.), (2.) nehmen nun, falls man die Coordinaten des Punktes i mit $(\varrho_i, \mu_i, \varphi_i)$ bezeichnet, und für $\frac{1}{E_i^1}$ und $\frac{1}{E_i}$ die bekannten Reihen [pg. 46] substituirt, folgende Gestalt an:

$$(6.) \quad \int \varepsilon do - M = 0,$$

$$(7.) \quad M_1 \sum_0^{\infty} \frac{\varrho_i^n}{A_1^{n+1}} P_n(\mu_i) + \int \left(\sum_0^{\infty} \frac{\varrho_i^n}{A^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right) \varepsilon do - G = 0.$$

In dieser letzten Gleichung müssen, weil der Punkt i innerhalb der Kugel von willkürlicher Lage ist, die Coefficienten der einzelnen Potenzen von φ_i *einzelnen* $= 0$ sein. Somit ergeben sich aus (6.), (7.) die Formeln:

$$\begin{aligned} \int \varepsilon d\sigma - M &= 0, \\ \frac{M_1}{A_1} + \frac{\int \varepsilon d\sigma}{A} - G &= 0, \\ \frac{M_1 P_n(\mu_i)}{A_1^{n+1}} + \frac{\int P_n(\cos \gamma) \varepsilon d\sigma}{A^{n+1}} &= 0, \quad [n = 1, 2, 3, \dots]; \end{aligned}$$

und diese Formeln gewinnen, falls man für $d\sigma$ und ε die Werthe (4.) und (5.) substituirt, und sodann die Integrationen, auf Grund der bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunctionen [pg. 77], wirklich ausführt, folgende Gestalt:

$$(f.) \quad 4\pi A^2 Y_0 = M,$$

$$(g.) \quad \frac{M_1}{A_1} + 4\pi A Y_0 = G,$$

$$(h.) \quad \frac{M_1 P_n(\mu_i)}{A_1^{n+1}} + \frac{4\pi A^2}{2n+1} \frac{Y_n(\mu_i, \varphi_i)}{A^{n+1}} = 0, \quad [n = 1, 2, 3, \dots].$$

Eliminirt man Y_0 aus (f.) und (g.), so gelangt man zurück zur Gleichung (3.). Beachtet man ferner, dass der Punkt i innerhalb der Kugel von *willkürlicher* Lage ist, dass mithin die in (h.) enthaltenen Argumente μ_i, φ_i *beliebig*, also z. B. vertauschbar sind mit μ, φ ; so gelangt man auf Grund der Formeln (f.), (h.) zu folgenden Resultaten:

$$Y_0 = \frac{M}{4\pi A^2},$$

$$Y_n(\mu, \varphi) = -\frac{M_1}{4\pi A^2} (2n+1) \left(\frac{A}{A_1}\right)^{n+1} P_n(\mu), \quad [n = 1, 2, 3, \dots].$$

Substituirt man aber diese Werthe der Y 's in (5.), so folgt:

$$\varepsilon = \frac{M}{4\pi A^2} - \frac{M_1}{4\pi A^2} \sum_1^\infty (2n+1) \left(\frac{A}{A_1}\right)^{n+1} P_n(\mu),$$

oder, falls man als untere Summationsgrenze die 0 statt der 1 einführt:

$$(8.) \quad \varepsilon = \frac{1}{4\pi A} \left(\frac{M}{A} + \frac{M_1}{A_1} \right) - \frac{M_1}{4\pi A^2} \sum_0^\infty (2n+1) \left(\frac{A}{A_1}\right)^{n+1} P_n(\mu).$$

Die Formeln (3.) und (8.) geben die Werthe von G und ε , und repräsentiren also die Lösung der gestellten Aufgabe. Es bleibt noch übrig, die Formel (8.) weiter zu vereinfachen durch Summation der dort auftretenden Reihe.

Bezeichnet R den Abstand des Oberflächenpunktes (A, μ, φ) vom festen Punkte M_1 , so ist [vgl. pg. 46]:

$$\frac{1}{R} = \sum_0^{\infty} \frac{A^n}{A_1^{n+1}} P_n(\mu).$$

Diese Formel gilt ganz allgemein für jedwedes Dreieck mit den Seiten R, A, A_1 , falls nur $A < A_1$ ist, und μ den Cosinus des der Seite R gegenüberliegenden Winkels bezeichnet, und kann daher z. B. nach A differentiirt werden. Demgemäss erhält man:

$$-\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial A} = \sum_0^{\infty} \frac{n A^{n-1}}{A_1^{n+1}} P_n(\mu),$$

oder, falls man diese Formel mit der vorhergehenden combinirt:

$$\frac{1}{R} - \frac{2A}{R^2} \frac{\partial R}{\partial A} = \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{A^n}{A_1^{n+1}} P_n(\mu),$$

oder, falls man noch mit A multiplicirt:

$$(9.) \quad \sum_0^{\infty} (2n+1) \left(\frac{A}{A_1}\right)^{n+1} P_n(\mu) = \frac{A}{R^3} \left(R^2 - 2AR \frac{\partial R}{\partial A}\right).$$

Nun ist aber, wie aus jenem Dreieck RAA_1 sofort sich ergibt:

$$R^2 = A^2 + A_1^2 - 2AA_1\mu,$$

mithin:

$$2R \frac{\partial R}{\partial A} = 2A - 2A_1\mu,$$

und folglich:

$$R^2 - 2AR \frac{\partial R}{\partial A} = A_1^2 - A^2;$$

so dass die Formel (9.) übergeht in:

$$(10.) \quad \sum_0^{\infty} (2n+1) \left(\frac{A}{A_1}\right)^{n+1} P_n(\mu) = \frac{A(A_1^2 - A^2)}{R^3}.$$

Dies in (8.) substituiert, erhält man:

$$(11.) \quad \varepsilon = \frac{1}{4\pi A} \left(\frac{M}{A} + \frac{M_1}{A_1}\right) - \frac{M_1(A_1^2 - A^2)}{4\pi A} \left(\frac{1}{R}\right)^3;$$

so dass man also, auf Grund der Formeln (3.) und (11.), zu folgendem Satze gelangt:

Denkt man sich eine isolirte Metallkugel mit der elektrischen Ladung M versehen, und der Einwirkung eines äussern elektrischen Massenpunktes M_1 ausgesetzt, so wird auf der Kugeloberfläche eine elektrische Belegung entstehen, deren Dichtigkeit ε in einfacher Beziehung steht zu den Entfernungen der einzelnen Stellen der Kugeloberfläche vom Punkte M_1 . Betrachtet man nämlich eine beliebige Stelle der Kugeloberfläche, und

bezeichnet man den Abstand dieser Stelle vom Punkte M_1 mit R , so hat die Dichtigkeit ε daselbst den Werth:

$$(12.) \quad \varepsilon = K - \frac{H}{R^3},$$

wo K und H Constanten sind.

Will man diese Constanten, und überdies auch den in der Kugel vorhandenen Potentialwerth G näher angeben, so sind folgende Formeln zu notiren:

$$(13.) \quad G = \frac{M}{A} + \frac{M_1}{A_1},$$

$$(14.) \quad \varepsilon = \frac{1}{4\pi A} \left(\frac{M}{A} + \frac{M_1}{A_1} \right) - \frac{M_1 (A_1^2 - A^2)}{4\pi A} \left(\frac{1}{R} \right)^3,$$

in denen A den Kugelradius, und A_1 den Centralabstand des Punktes M_1 vorstellen. Dabei sei bemerkt, dass die in (14.) enthaltene Differenz $(A_1^2 - A^2)$ den Werth hat:

$$(14a.) \quad A_1^2 - A^2 = B_1^2,$$

wo B_1 die Länge der von M_1 aus an die Kugel gelegten Tangente bezeichnet.

§ 10.

Fortsetzung. Betrachtung eines speciellen Falles.

Wir betrachten den *speciellen* Fall, dass die der Kugel mitgetheilte elektrische Ladung M gleich *Null* ist:

$$(15.) \quad M = 0.$$

Alsdann gehen die Formeln (13.), (14.) über in:

$$(16.) \quad G = \frac{M_1}{A_1},$$

$$(17.) \quad \varepsilon = \frac{M_1}{4\pi A A_1} \left(1 - \frac{A_1 B_1^2}{R^3} \right),$$

wo B_1 die in (14a.) genannte Bedeutung hat. Die letzte Formel ist auch so darstellbar:

$$(18.) \quad \varepsilon = \frac{M_1}{4\pi A A_1} \left(1 - \frac{R_1^3}{R^3} \right),$$

wo alsdann R_1 eine *neue Constante* vorstellt, die sich bestimmt mittelst der Gleichung:

$$(19.) \quad R_1^3 = A_1 B_1^2,$$

und die also, ihrem Werthe nach, nothwendig *zwischen* A_1 und B_1 liegt*):

$$(19a.) \quad B_1 < R_1 < A_1.$$

Denkt man sich um den Punkt M_1 (als Centrum) drei Hülfskugelflächen (B_1) , (R_1) , (A_1) beschrieben, respective mit den Radien B_1 , R_1 und A_1 , so wird die Oberfläche der gegebenen Metallkugel von den Flächen (B_1) und (A_1) stets *geschnitten* werden**), folglich auch geschnitten werden von der *zwischen* diesen beiden Flächen (B_1) und (A_1) sich hinziehenden Fläche (R_1) .

Die Kreisperipherie, in welcher die Oberfläche der Metallkugel von der Fläche (R_1) geschnitten wird, mag α heissen. Gleichzeitig mögen die beiden Calotten, in welche die Metallkugeloberfläche durch die Peripherie α zerfällt, mit \mathfrak{C}_α und \mathfrak{C}_β benannt werden, der Art, dass die Calotte \mathfrak{C}_α dem Punkte M_1 *abgewendet*, die Calotte \mathfrak{C}_β dem Punkte M_1 *zugewendet* ist. Ueberdies mögen unter α und β die *sphärischen Mittelpunkte* der beiden Calotten verstanden sein, der Art, dass α und β diejenigen Punkte vorstellen, in denen die Metallkugeloberfläche von einer durch ihr Centrum und den Punkt M_1 gehenden geraden Linie getroffen wird.

Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt auf der gegebenen Metallkugeloberfläche, und bezeichnet man, ebenso wie in (18.), die elektrische Dichtigkeit in diesem Punkte mit ε , und den Abstand des Punktes von M_1 mit R , so wird offenbar $R > R_1$ oder $= R_1$ oder $< R_1$ sein, jenachdem der Punkt auf \mathfrak{C}_α , auf α oder auf \mathfrak{C}_β liegt. Und demgemäss wird der Quotient $\frac{\varepsilon}{M_1}$, wie aus (18.) folgt, *positiv* sein für alle Punkte der Calotte \mathfrak{C}_α , ferner *Null* sein für alle Punkte der Peripherie α , endlich *negativ* sein für alle Punkte der Calotte \mathfrak{C}_β . Die elektrische Belegung hat also auf \mathfrak{C}_α *gleiches Vorzeichen* mit M_1 , und auf \mathfrak{C}_β das *entgegengesetzte Vorzeichen*: während die Peripherie α , in welcher die beiden Calotten zusammengrenzen, eine *neutrale Zone* repräsentirt, auf welcher die elektrische Dichtigkeit überall $= 0$ ist.

Bezeichnet man die auf \mathfrak{C}_α und \mathfrak{C}_β vorhandenen Elektrizitätsmengen respective mit M_α und M_β , so ist offenbar $(M_\alpha + M_\beta)$ gleich

*) Es ist A_1 der *Centralabstand* des Punktes M_1 , und B_1 die von M_1 aus an die Kugel gelegte *Tangente*. Folglich ist $B_1 < A_1$. Die rechte Seite der Formel (19.) wird daher *vergrössert* werden, sobald man das dortige B_1 durch A_1 ersetzt. Demgemäss ergibt sich: $R_1^s < A_1^s$, d. i. $R_1 < A_1$. Und in ähnlicher Weise findet man andererseits: $R_1 > B_1$. — Q. e. d.

**) Die Fläche (A_1) geht nämlich durch das *Centrum* der Metallkugel. Und die Fläche (B_1) schneidet die Oberfläche der Metallkugel *orthogonal*.

der der Metallkugel von Hause aus zuertheilten elektrischen Ladung M , also nach (15.):

$$(20.) \quad M_\alpha + M_\beta = 0.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, diese Quantitäten M_α und M_β *einzel*n zu berechnen.

Sind (A, μ, φ) die Polarcoordinaten des Elementes $\varepsilon d\sigma$ in Bezug auf das schon früher benutzte Polarcoordinatensystem, dessen Anfangspunkt O im Centrum der Kugel liegt, und dessen Axe mit der Linie OM_1 zusammenfällt, so ist offenbar:

$$(21.) \quad M_\alpha = \int_{-1}^{\mu_1} \int_0^{2\pi} \varepsilon A^2 d\mu d\varphi,$$

wo die *obere* Grenze μ_1 den der Peripherie α entsprechenden Werth von μ vorstellen soll, während die *untere* Grenze -1 den Werth von μ im Punkte α repräsentirt. Diese Formel (21.) ist, weil ε vom Azimuth φ unabhängig ist, auch so darstellbar:

$$M_\alpha = 2\pi A^2 \int_{-1}^{\mu_1} \varepsilon d\mu.$$

Hieraus folgt, falls man für ε seinen Werth (18.) substituirt:

$$M_\alpha = \frac{M_1 A}{2 A_1} \int_{-1}^{\mu_1} \left(1 - \frac{R_1^3}{R^3}\right) d\mu,$$

oder, falls man, auf Grund der Formeln:

$$R^2 = A^2 + A_1^2 - 2 A A_1 \mu,$$

$$R dR = -A A_1 d\mu,$$

die Variable R , an Stelle von μ , als Integrationsvariable einführt:

$$M_\alpha = \frac{M_1 A}{2 A_1} \frac{1}{A A_1} \int_{R_1}^{A+A_1} \left(R - \frac{R_1^3}{R^2}\right) dR,$$

oder, falls man die Integration wirklich ausführt:

$$M_\alpha = \frac{M_1}{2 A_1^2} \left[\frac{(A + A_1)^2 - R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{A + A_1} - R_1^2 \right],$$

oder, falls man im vorletzten Gliede für R_1^3 den aus (19.) und (14a.) ersichtlichen Werth $A_1(A_1^2 - A^2)$ substituirt:

$$M_\alpha = \frac{M_1}{2 A_1^2} \left[\frac{(A + A_1)^2 - 3 R_1^2}{2} + A_1(A_1 - A) \right],$$

oder besser geordnet:

$$(22.) \quad M_\alpha = \frac{M_1}{4 A_1^2} [3(A_1^2 - R_1^2) + A^2].$$

Ueberdies ist nach (20.):

$$(23.) \quad M_\beta = -M_\alpha.$$

Wir gelangen somit, auf Grund der Formeln (18.), (19.) und (22.), (23.) zu folgendem Resultate:

Wird einer isolirten Metallkugel, die im natürlichen (unelektrischen) Zustande sich befindet, von Aussen her ein elektrischer Massenpunkt M_1 genähert, so entsteht auf der Kugeloberfläche eine theils positive theils negative elektrische Belegung. Es markiren sich nämlich auf der Kugeloberfläche zwei Calotten, von denen die dem Punkte M_1 abgewendete dieselbe Elektricität besitzt, wie der Punkt M_1 selber; während die andere, diesem Punkte zugewendete, die entgegengesetzte Elektricität aufweist. Die neutrale Zone, in welcher diese beiden Calotten aneinander grenzen, besteht aus denjenigen Punkten, deren Entfernung R_1 vom Punkte M_1 der Formel entspricht:

$$(24.) \quad R_1^3 = A_1 B_1^2;$$

dabei bezeichnet A_1 den Centralabstand des Punktes M_1 , und B_1 die Länge der von M_1 aus an die Kugel gelegten Tangente.

Die auf den beiden Calotten vorhandenen Elektricitätsmengen sind, dem absoluten Betrage nach, einander gleich. Und zwar hat dieser absolute Betrag den Werth:

$$(25.) \quad (\text{abs } M_1) \frac{3(A_1^2 - R_1^2) + A^2}{4A_1^2},$$

wo A_1 , R_1 die schon genannten Bedeutungen haben, während A den Kugelradius bezeichnet.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass der in der Kugel vorhandene Potentialwerth G lauten wird:

$$(26.) \quad G = \frac{M_1}{A_1};$$

wie solches in (16.) constatirt wurde.

Nach (19.) und (14a.) ist:

$$R_1^3 = A_1(A_1^2 - A^2),$$

$$\text{d. i.} \quad R_1^3 = A_1^3 \left[1 - \left(\frac{A}{A_1} \right)^2 \right].$$

Erhebt man diese Formel zur $\left(\frac{2}{3} \right)^{\text{ten}}$ Potenz, und setzt man dabei voraus, dass der Punkt M_1 von der Kugel *weit entfernt* ist, dass mithin die höhern Potenzen von $\frac{A}{A_1}$ vernachlässigt werden dürfen, so erhält man:

$$R_1^2 = A_1^2 \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{A}{A_1} \right)^2 \right],$$

d. i.

$$R_1^2 = A_1^2 - \frac{2}{3} A^2.$$

Substituirt man aber diesen Werth von R_1^2 in (25.), so erhält man für den absoluten Betrag der auf jeder der beiden Calotten vorhandenen Elektricitätsmengen den Werth:

$$(27.) \quad (\text{abs } M_1) \frac{3A^2}{4A_1^2};$$

woraus folgt, dass dieser Betrag verschwindet, sobald der Punkt M_1 ins Unendliche sich entfernt.

§ 11.

Betrachtung des Falles, dass die Metallkugel zur Erde abgeleitet ist.

Die Formeln (A.), (B.) der allgemeinen Theorie [pg. 161] gelten nicht nur für die *isolirte*, sondern auch für die *zur Erde abgeleitete* Kugel; nur mit dem Unterschiede, dass die in jenen Formeln enthaltenen Constanten M , G im einen und im andern Fall einen etwas verschiedenen Charakter besitzen. Während nämlich im Fall der *isolirten* Kugel M die *gegebene elektrische Ladung* repräsentirt und G *unbekannt* ist, wird umgekehrt im Fall der *abgeleiteten* Kugel M *unbekannt*, hingegen G *bekannt*, nämlich $= 0$ sein.

An Stelle der Formeln (13.), (14.) p. 181, die wir für den Fall der *isolirten* Kugel erhalten haben, werden wir daher für den Fall der *abgeleiteten* Kugel folgende erhalten*):

$$(\alpha.) \quad 0 = \frac{M}{A} + \frac{M_1}{A_1},$$

$$(\beta.) \quad \varepsilon = - \frac{M_1(A_1^2 - A^2)}{4\pi A} \left(\frac{1}{R} \right)^3.$$

Die *erste* dieser Formeln giebt den Werth von M , d. i. die Gesamtmasse der auf der Kugeloberfläche entstehenden elektrischen Belegung, und die *zweite* liefert den Werth der Dichtigkeit ε dieser Belegung. Demgemäss gelangen wir zu folgendem Resultate:

Wird einer zur Erde abgeleiteten Metallkugel von Aussen her ein elektrischer Massenpunkt M_1 genähert, so entsteht auf der Kugeloberfläche eine elektrische Belegung, deren Gesamtmasse M den Werth hat:

$$(28.) \quad M = - \frac{A M_1}{A_1},$$

wo A den Kugelradius, und A_1 den Centralabstand des Punktes M_1 vorstellen.

*) Aus (13.) ergibt sich sofort die Formel (α). Mit Rücksicht auf (α) ergibt sich sodann aber aus (14.) die Formel (β).

Die Dichtigkeit ε dieser Belegung ist an jeder Stelle der Kugeloberfläche umgekehrt proportional mit dem Cubus des Abstandes dieser Stelle von M_1 , nämlich ausdrückbar durch die Formel:

$$(29.) \quad \varepsilon = - \frac{M_1 (A_1^2 - A^2)}{4\pi A} \left(\frac{1}{R}\right)^3 = - \frac{M_1 B_1^2}{4\pi A} \left(\frac{1}{R}\right)^3,$$

wo R den genannten Abstand bezeichnet, während B_1 die Länge der von M_1 aus an die Kugel gelegten Tangente repräsentirt.

Ist der Punkt M_1 positiv, so wird [wie aus (29.) folgt] ε überall negativ sein. Und umgekehrt: Ist M_1 negativ, so wird ε überall positiv sein.

Es sei P der gegebene Ort des elektrischen Massenpunktes M_1 , ferner Q der zu P in Bezug auf die Kugeloberfläche conjugirte Punkt. Mit andern Worten: Es sei Q der Mittelpunkt desjenigen Kreises, in welchem der von P an die Kugeloberfläche gelegte Tangentialkegel diese Fläche berührt. Unter Anwendung dieser beiden Punkte P und Q ergeben sich alsdann noch zwei weitere Sätze, auf deren Beweis (weil er leicht zu führen ist) hier nicht näher eingegangen werden soll.

Erstens: Das Potential der in Rede stehenden auf der Kugeloberfläche ausgebreiteten elektrischen Belegung in Bezug auf *innere* Punkte ist von genau derselben Beschaffenheit, als rührte es her von einer in P concentrirten elektrischen Masse: $(-M_1)$.

Zweitens: Das Potential jener Belegung in Bezug auf *äussere* Punkte ist von derselben Beschaffenheit, als rührte es her von einer in Q concentrirten Elektrizitätsmasse: $\left(-\frac{AM_1}{A_1}\right)$. Diesem zweiten Satz kann man übrigens, mit Rücksicht auf (28.), auch folgende einfachere Gestalt geben: Das Potential der Belegung auf *äussere* Punkte ist von derselben Beschaffenheit, als wäre die ganze Masse M dieser Belegung im Punkte Q concentrirt.

§ 12.

Die elektrische Vertheilung auf einem Sphäroid.

Es sei ein *isolirter* metallischer Conductor gegeben, der die Form eines Sphäroids besitzt, und der mit einer gegebenen Elektrizitätsmenge M geladen ist. Dabei aber mag vorausgesetzt sein, dass auf denselben von Aussen her *keinerlei* Kräfte einwirken. Für die Dichtigkeit ε der unter diesen Umständen auf der Sphäroidoberfläche entstehenden elektrischen Belegung, und für den gleichzeitig innerhalb des Sphäroids entstehenden Potentialwerth G ergeben sich alsdann aus der allgemeinen Theorie [vgl. (A.), (B.) pg. 161] die Formeln:

$$(1.) \quad \int \varepsilon d\sigma = M,$$

$$(2.) \quad \int \frac{\varepsilon d\sigma}{R^2} = G,$$

wo i einen Punkt innerhalb des Sphäroids vorstellt, dessen Lage dasselbst beliebig variiren darf. Es handelt sich darum, die beiden Unbekannten ε und G , auf Grund dieser beiden Gleichungen, zu berechnen.

Ebenso wie früher [pg. 88] mag die Gleichung der Sphäroidoberfläche in der Form gegeben sein:

$$(3.) \quad R = A[1 + \alpha f(\mu, \varphi)],$$

wo α eine äusserst kleine Constante bezeichnet, deren zweite Potenz zu vernachlässigen ist, während $f(\mu, \varphi)$ eine nach Kugelfunctionen entwickelte Function vorstellt:

$$f(\mu, \varphi) = \sum_0^{\infty} Y_n(\mu, \varphi).$$

Auch mag, ebenso wie damals, die in (3.) enthaltene Constante A der Art gewählt sein, dass das Volumen des Sphäroids ebenso gross ist wie das Volumen einer Kugel vom Radius A . Alsdann wird die Constante Y_0 , wie aus unseren früheren Untersuchungen [in § 4 pg. 94—96] sich leicht ergibt, den Werth Null haben; so dass also die Formel für $f(\mu, \varphi)$ sich reducirt auf:

$$(4.) \quad f(\mu, \varphi) = \sum_1^{\infty} Y_n(\mu, \varphi).$$

Es sei O das Centrum des Sphäroids, d. i. der Anfangspunkt des Coordinatensystems. Ferner sei $d\sigma$ ein an der Stelle (R, μ, φ) gelegenes Element der Sphäroidoberfläche; und zwar mag dieses Element $d\sigma$ von solcher Figur sein, dass ein vom Punkte O nach dem Rande von $d\sigma$ gelegter Kegelmantel aus einer um O mit dem Radius Eins beschriebenen Kugelfläche ein unendlich kleines Rechteck $d\mu d\varphi$ ausschneidet. Alsdann ist offenbar:

$$d\sigma = \frac{R^2 d\mu d\varphi}{\cos \tau},$$

wo τ den Winkel vorstellt, unter welchem die äussere Normale des Elementes $d\sigma$ gegen den Radiusvector R , oder vielmehr gegen die Verlängerung desselben, geneigt ist. Demgemäss hat die auf $d\sigma$ vorhandene Elektrizitätsmenge $\varepsilon d\sigma$ den Werth:

$$(5.) \quad \varepsilon d\sigma = \left(\frac{\varepsilon}{\cos \tau} \right) R^2 d\mu d\varphi.$$

Um nun die unbekannte Dichtigkeit ε zu ermitteln, machen wir für $\frac{\varepsilon}{\cos \tau}$ den Ansatz:

$$(6.) \quad \frac{\varepsilon}{\cos \tau} = C[1 + \alpha \psi(\mu, \varphi)],$$

wo α dieselbe äusserst kleine Constante, wie in (3.), sein soll, während C eine noch zu bestimmende Constante, und $\psi(\mu, \varphi)$ eine noch zu bestimmende Function vorstellen. Diese letztere denken wir uns nach Kugelfunctionen entwickelt:

$$(7.) \quad \psi(\mu, \varphi) = \Psi_0 + \sum_1^{\infty} \Psi_n(\mu, \varphi).$$

Es sei $a < A$, und zwar sei a so klein, dass eine um O mit dem Radius a beschriebene *Hilfskugelfläche* vollständig innerhalb der Sphäroidoberfläche liegt. Bezeichnet man alsdann die Coordinaten irgend eines *innerhalb* dieser Hilfskugelfläche (a) gelegenen Punktes i mit $(\varrho_i, \mu_i, \varphi_i)$ und den Abstand des Punktes i vom Element do (R, μ, φ) mit E_i , so ist [vgl. pg. 46]:

$$(8.) \quad \frac{1}{E_i} = \sum_0^{\infty} \frac{\varrho_i^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \gamma),$$

wo γ die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen (μ_i, φ_i) und (μ, φ) bezeichnet.

Die beiden Grundgleichungen (1.), (2.) gewinnen nun durch Substitution der Werthe (5.) und (8.) folgende Gestalt:

$$(9.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varepsilon}{\cos \tau} \right) R^2 d\mu d\varphi - M = 0,$$

$$(10.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left(\sum_0^{\infty} \frac{\varrho_i^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right) \left(\frac{\varepsilon}{\cos \tau} \right) d\mu d\varphi - G = 0.$$

Die letzte Gleichung muss stattfinden für alle Lagen, welche der Punkt i innerhalb der Hilfskugelfläche (a) überhaupt anzunehmen im Stande ist. Demgemäss müssen in ihr die Coefficienten der Potenzen von ϱ_i *einzelnen* $= 0$ sein, so dass man also zu folgenden Formeln gelangt:

$$(11.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} R P_0(\cos \gamma) \left(\frac{\varepsilon}{\cos \tau} \right) d\mu d\varphi - G = 0,$$

$$(12.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{P_n(\cos \gamma)}{R^{n+1}} \left(\frac{\varepsilon}{\cos \tau} \right) d\mu d\varphi = 0, \quad [n = 1, 2, 3, \dots].$$

Substituirt man jetzt in (9.) und (11.), (12.) für R und $\frac{\varepsilon}{\cos \tau}$ die Werthe (3.) und (6.), und beachtet man, dass α^2 zu vernachlässigen ist, und beachtet man überdies, dass $P_0(\cos \gamma) = 1$ ist, so erhält man:

$$A^2 C \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} [1 + 2\alpha f(\mu, \varphi) + \alpha \psi(\mu, \varphi)] d\mu d\varphi = M,$$

$$AC \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} [1 + \alpha f(\mu, \varphi) + \alpha \psi(\mu, \varphi)] d\mu d\varphi = G,$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} [1 - (n-1)\alpha f(\mu, \varphi) + \alpha \psi(\mu, \varphi)] P_n(\cos \gamma) d\mu d\varphi = 0,$$

$$[n = 1, 2, 3, \dots].$$

Substituirt man aber hier für $f(\mu, \varphi)$ und $\psi(\mu, \varphi)$ die Entwicklungen (4.) und (7.), so erhält man unter Anwendung der Integraleigenschaften der Kugelfunctionen [p. 77]:

$$(\alpha.) \quad 4\pi A^2 C [1 + \alpha \Psi_0] = M,$$

$$(\beta.) \quad 4\pi AC [1 + \alpha \Psi_0] = G,$$

$$(\gamma.) \quad -(n-1) Y_n(\mu_i, \varphi_i) + \Psi_n(\mu_i, \varphi_i) = 0, \quad [n = 1, 2, 3, \dots].$$

Der Punkt i darf innerhalb der Hilfskugelfläche (α) jede beliebige Lage annehmen. Demgemäss sind die Argumente μ_i, φ_i ganz *willkürlich*, also z. B. auch ersetzbar durch μ, φ . Und mit Rücksicht hierauf folgt aus (α .) und (γ .):

$$(\delta.) \quad C(1 + \alpha \Psi_0) = \frac{M}{4\pi A^2},$$

$$(\varepsilon.) \quad \Psi_n(\mu, \varphi) = (n-1) Y_n(\mu, \varphi), \quad [n = 1, 2, 3, \dots].$$

Substituirt man aber diese Werthe (δ .), (ε .) in die aus (6.), (7.) entspringende Formel:

$$\frac{\varepsilon}{\cos \tau} = C(1 + \alpha \Psi_0) + C\alpha \sum_1^{\infty} \Psi_n(\mu, \varphi),$$

und beachtet man dabei von Neuem, dass α^2 zu vernachlässigen ist, so ergibt sich:

$$(13.) \quad \frac{\varepsilon}{\cos \tau} = \frac{M}{4\pi A^2} + \frac{M\alpha}{4\pi A^2} \sum_1^{\infty} (n-1) Y_n(\mu, \varphi).$$

Ueberdies ergibt sich aus (α .) und (β .) durch Division:

$$(14.) \quad G = \frac{M}{A};$$

so dass man also auf Grund der Formeln (13.), (14.) zu folgendem Resultate gelangt:

Es sei gegeben ein Sphäroid:

$$(15.) \quad R = A \left[1 + \alpha \sum_1^{\infty} Y_n(\mu, \varphi) \right]$$

vom Volumen $\frac{4\pi A^3}{3}$, [vgl. den Uebergang von (3.) zu (4.)].

Denkt man sich dieses Sphäroid als einen isolirten metallischen Conductor, der mit der elektrischen Ladung M versehen ist, so wird die nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes auf der Sphäroidoberfläche vorhandene elektrische Belegung eine Dichtigkeit ε besitzen, welche den Werth hat:

$$(16.) \quad \varepsilon = \frac{M \cos \tau}{4\pi A^2} \left[1 + \alpha \sum_1^{\infty} (n-1) Y_n(\mu, \varphi) \right],$$

wo τ den Winkel vorstellt, unter welchem die äussere Normale der Sphäroidoberfläche gegen den vom Anfangspunkte auslaufenden Radiusvector geneigt ist. — Gleichzeitig wird

$$(17.) \quad G = \frac{M}{A}$$

der im Sphäroid vorhandene Potentialwerth sein.

§ 13.

Allgemeine Betrachtung über das Gesetz, nach welchem zwei elektrische Massentheilchen auf einander einwirken.

Wir wollen in diesem letzten Paragraph die repulsive Kraft, welche zwei elektrische Theilchen m und m_1 im Abstände E auf einander ausüben, mit

$$(1.) \quad mm_1 F(E)$$

bezeichnen, und die Function $F(E)$ als eine völlig unbekannte uns denken. Dabei stellen wir uns die Aufgabe, diese Function, lediglich auf Grund *experimenteller Thatsachen*, zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine isolirte, mit irgend welcher elektrischen Ladung M versehene Metallkugel, auf welche von Aussen her keinerlei Kräfte influiren. Nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes ist, wie aus den *experimentellen Untersuchungen* Coulomb's hervorgeht, *freie* Elektrizität immer *nur an der Oberfläche* vorhanden. Auch muss diese an der Kugeloberfläche vorhandene elektrische Belegung, wie aus der Symmetrie der Kugel um ihren Mittelpunkt folgt, *von überall gleicher Dichtigkeit* sein.

Soll nun aber dieser direct aus den experimentellen Thatsachen sich ergebende Gleichgewichtszustand den Anforderungen des Gleichgewichts *wirklich* entsprechen, so muss während dieses Zustandes die Wirkung auf jedwede Stelle im Innern der Kugel $= 0$ sein. Denn andernfalls würde die an einer solchen Stelle vorhandene neutrale Elektrizität durch jene Wirkung eine Zersetzung erleiden, also *kein* Gleichgewicht vorhanden sein. — Demgemäss gelangen wir zu folgendem Satz:

Das noch unbekannte Gesetz (1.) muss von solcher Beschaffenheit sein, dass auf Grund dieses Gesetzes die Wirkung einer gleichmässig mit Elektricität belegten Kugelfläche in Bezug auf alle innern Punkte den Werth Null hat.

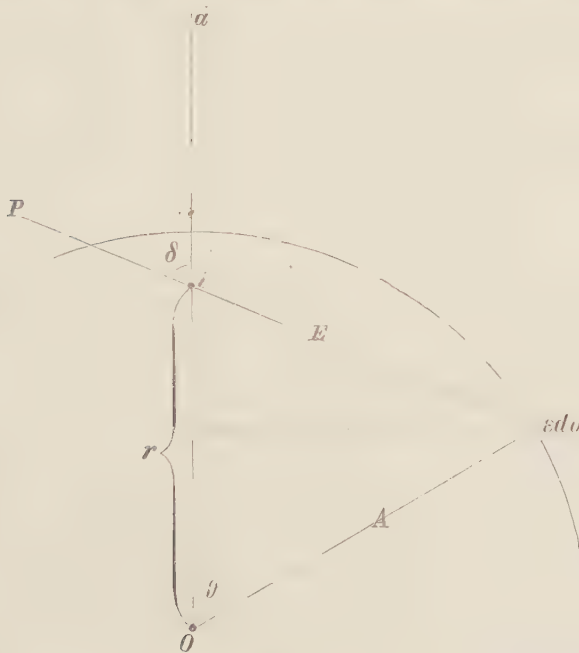
Um nach dieser Vorschrift jenes Gesetz (1.) d. i. die unbekannte Function $F(E)$ näher zu bestimmen, wird es zweckmässig sein, noch zwei weitere unbekannte Functionen $\Phi(E)$ und $\Psi(E)$ einzuführen, welche zu $F(E)$ in folgender Beziehung stehen:

$$(2.) \quad F(E) = \Phi'(E),$$

$$(3.) \quad E\Phi(E) = \Psi'(E),$$

wo die Accente Differentiationen andeuten sollen.

Bezeichnet man nun die *constant* Dichtigkeit der in Rede stehenden gleichmässigen Belegung der Kugelfläche mit ε , und irgend ein Element dieser Fläche mit εdo , und denkt man sich irgendwo innerhalb der



Fläche einen Punkt i von der Masse *Eins*, so hat die von εdo auf i ausgeübte Kraft P , bei Zugrundelegung des Gesetzes (1.), den Werth:

$$P = F(E) \cdot \varepsilon do,$$

wo E den Abstand des Punktes i von εdo vorstellt. Die Componente dieser Kraft P nach der vom Centrum O ausgehenden Richtung Oia ist daher:

$$P \cos \delta = F(E) \cos \delta \cdot \varepsilon d\sigma,$$

wo δ den Neigungswinkel der Kraft P gegen jene Richtung vorstellt. Demgemäss wird die von der *ganzen* Belegung auf den Punkt i ausgeübte Kraft R , gerechnet in der Richtung Oia , den Werth haben:

$$(4.) \quad R = \int F(E) \cos \delta \cdot \varepsilon d\sigma,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der Kugel-
fläche.

Bezeichnet man die Polarcoordinaten des Elementes $\varepsilon d\sigma$ mit (A, ϑ, φ) oder (A, μ, φ) , wo $\mu = \cos \vartheta$ sein soll, indem man dabei ein Polarcoordinatensystem anwendet, dessen Anfangspunkt mit dem Kugelcentrum O , und dessen Axe mit der Linie Oia zusammenfällt, so ist offenbar:

$$d\sigma = A^2 d\mu d\varphi, \quad \text{und} \quad \cos \delta = \frac{r - A \cos \vartheta}{E} = \frac{r - A\mu}{E},$$

wo r den Centralabstand des Punktes i bezeichnet. Somit folgt aus (4.):

$$(4a.) \quad R = \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} F(E) \frac{r - A\mu}{E} \varepsilon A^2 d\mu d\varphi,$$

oder, falls man die Integration nach φ wirklich ausführt:

$$(4b.) \quad R = 2\pi \varepsilon A^2 \int_{-1}^{+1} F(E) \frac{r - A\mu}{E} d\mu;$$

eine Formel, die man mit Rücksicht auf (2.) offenbar auch so schreiben kann:

$$(4c.) \quad R = 2\pi \varepsilon A^2 \int_{-1}^{+1} \Phi(E) \frac{\partial E}{\partial r} d\mu,$$

oder auch so:

$$(5.) \quad R = 2\pi \varepsilon A^2 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_{-1}^{+1} \Phi(E) d\mu \right\};$$

denn es ist, was den Uebergang von (4b.) zu (4c.) betrifft:

$$(\alpha.) \quad E^2 = A^2 + r^2 - 2Ar\mu,$$

mithin:

$$(\beta.) \quad \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{r - A\mu}{E}.$$

Führt man jetzt statt μ die Variable E als Integrationsvariable ein, indem man, auf Grund der Relation $(\alpha.)$,

$$d\mu = - \frac{E dE}{Ar}$$

setzt, so gewinnt die Formel (5.) folgende Gestalt:

$$(6.) \quad R = 2\pi\epsilon A \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \int_{A-r}^{A+r} \Phi(E) \cdot E dE \right\};$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (3.):

$$(7.) \quad R = 2\pi\epsilon A \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\Psi(A+r) - \Psi(A-r)}{r} \right\}.$$

Zufolge des vorhin ausgesprochenen Satzes [pg. 191] muss nun $R = 0$ sein, und zwar für *beliebige* Lagen des innern Punktes i , d. i. für *beliebige* Werthe von r zwischen den Grenzen $r = 0$ und $r = A$. Demgemäss erkennt man, dass der in (7.) in der geschweiften Klammer enthaltene Ausdruck einen *von r unabhängigen* Werth C besitzen muss. Aus der so entstehenden Gleichung

$$\Psi(A+r) - \Psi(A-r) = Cr$$

ergiebt sich durch zweimalige Differentiation nach r :

$$(8.) \quad \Psi''(A+r) = \Psi''(A-r).$$

Diese Formel sagt aus, dass die Function $\Psi''(E)$ für zwei beliebige Werthe von E stets einerlei Werth besitzt, dass mithin diese Function einen *von E unabhängigen* Werth K haben muss. Aus der so entstehenden Gleichung:

$$(9.) \quad \Psi''(E) = K$$

folgt aber durch Integration:

$$(10.) \quad \Psi'(E) = KE - H,$$

wo H , ebenso wie K , *von E unabhängig* ist.

Dividirt man jetzt die Gleichung (10.) durch E , so folgt mit Rücksicht auf (3.):

$$(11.) \quad \Phi(E) = K - \frac{H}{E};$$

und differentiirt man endlich diese letztere Gleichung nach E , so folgt mit Rücksicht auf (2.):

$$(12.) \quad F(E) = \frac{H}{E^2};$$

so dass man also zu folgendem Resultate gelangt:

Die experimentelle Thatsache, dass bei einem elektrisch geladenen Conductor freie Elektricität immer nur an der Oberfläche anzutreffen ist, kann dazu dienen, um das Gesetz zu bestimmen, nach welchem zwei elektrische Theilchen auf einander einwirken. Und zwar ergiebt sich auf Grund jener Thatsache, dass diese Einwirkung umgekehrt proportional sein muss mit dem Quadrat der Entfernung.

Neuntes Capitel.

Allgemeine Betrachtungen über die elektrische Vertheilung.

Als Instrument für unsere weiteren Untersuchungen werden wir zunächst *drei sehr allgemeine Formeln* (A.), (B.), (C.) ableiten, die zum ersten Mal wohl von *Green* (1828) aufgestellt sein dürften*). Mittelst dieser Formeln werden wir sodann zeigen, dass die im vorhergehenden Capitel aus der allgemeinen Theorie der elektrischen Vertheilung hergeleiteten Gleichungen stets nur *eine* Lösung zulassen, dass also die elektrische Vertheilung durch jene Gleichungen in jedem gegebenen Fall *vollständig und eindeutig* bestimmt ist. Auch werden wir diesen wichtigen Satz auf mancherlei Beispiele anwenden, um in solcher Weise seinen praktischen Nutzen deutlicher hervortreten zu lassen.

Endlich werden wir am Schlusse des Capitels zwei Sätze über die *Substitution von Massen* aufstellen, nämlich zeigen, dass *gegebene Massen* durch gewisse *andere Massen* ersetzt werden können, ohne dass dadurch die *Wirkung* innerhalb eines gegebenen Raumes irgendwie *alterirt* würde.

§ 1.

Aufstellung einiger Hülfsätze.

Lässt man vom Punkte (x, y, z) irgend eine Richtung n ausgehen, so gelten bekanntlich [vgl. (14.) pg. 5.] die Formeln:

$$(a.) \quad \frac{dx}{dn} = \cos(n, x), \quad \frac{dy}{dn} = \cos(n, y), \quad \frac{dz}{dn} = \cos(n, z).$$

Versteht man nun unter $f = f(x, y, z)$ eine beliebig gegebene Function, so erhält man für den Differentialquotienten dieser Function nach der Richtung n den Ausdruck:

*) In der schon auf pg. 1 citirten Abhandlung.

$$\frac{df}{dn} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dn}.$$

Diesen Ausdruck kann man, mit Rücksicht auf (α), auch so schreiben:

$$(\beta.) \quad \frac{df}{dn} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(n, z).$$

Lässt man jetzt vom Punkte (x, y, z) irgend eine *neue* Richtung v ausgehen, so ergibt sich die analoge Formel:

$$(\gamma.) \quad \frac{df}{dv} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(v, x) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(v, y) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(v, z).$$

Aus diesen beiden Formeln (β .) und (γ .) folgt aber sofort, dass

$$(\delta.) \quad \frac{df}{dn} = - \frac{df}{dv}$$

sein wird, sobald die Richtungen n und v zu einander entgegengesetzt sind; so dass man also folgenden Satz aussprechen kann:

Satz. — *Differentiirt man eine Function $f = f(x, y, z)$ nach zwei zu einander entgegengesetzten Richtungen, so werden die in solcher Weise entstehenden Differentialquotienten entgegengesetzte Werthe haben.*

Dies vorangeschickt, gehen wir über zu unserm eigentlichen Gegenstande. Es sei gegeben irgend eine *geschlossene Fläche* O . Und es repräsentire $f = f(x, y, z)$ eine Function, die *innerhalb* O *stetig* ist. Man construire nun parallel zur x -Axe ein *unendlich dünnes rechtwinkliges Prisma*, welches innerhalb O von 1 nach 2 geht, [vgl. die Figur]. Der senkrechte Querschnitt α dieses Prismas sei dargestellt durch ein der y - und z -Axe paralleles unendlich kleines Rechteck $dydz$:

$$(1.) \quad \alpha = dydz.$$

Dieses Prisma mag unten und oben durch die Fläche O begrenzt gedacht werden; so dass also seine beiden *Endflächen* durch zwei Elemente do_1, do_2 jener Fläche dargestellt sind.

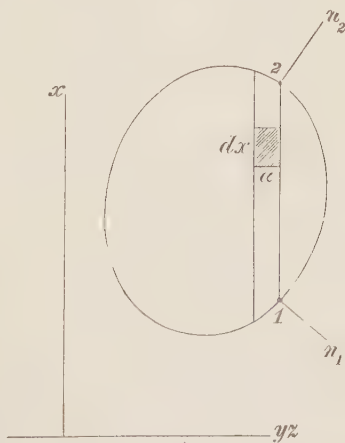
Das über alle *Volumelemente* αdx des Prismas ausgedehnte Integral

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} \alpha dx$$

ist folgendermassen darstellbar:

$$(2.) \quad \int \frac{\partial f}{\partial x} \alpha dx = \alpha(f_2 - f_1),$$

wo f_1 und f_2 die Werthe von f in den Punkten 1 und 2 vorstellen. Nun kann aber der Querschnitt α als die senkrechte Projection von do_1 , und ebenso auch als die senkrechte Projection von do_2 angesehen



werden. Bezeichnet man also die auf do_1 und do_2 errichteten äussern Normalen mit n_1 und n_2 , so gelten die Formeln:

$$(3.) \quad \alpha = -do_1 \cos(n_1, x) \quad \text{und} \quad \alpha = +do_2 \cos(n_2, x);$$

denn man hat zu beachten, dass der Winkel (n_1, x) *stumpf* ist [vgl. die Figur], während (n_2, x) sich als *spitz* erweist. Aus (3.) folgt sofort:

$$(4.) \quad \alpha f_1 = -f_1 do_1 \cos(n_1, x) \quad \text{und} \quad \alpha f_2 = +f_2 do_2 \cos(n_2, x).$$

Substituiert man aber diese Werthe von αf_1 und αf_2 in (2.), so erhält man:

$$(5.) \quad \int \frac{\partial f}{\partial x} \alpha dx = f_1 \cos(n_1, x) do_1 + f_2 \cos(n_2, x) do_2,$$

wo das Integral links über sämtliche Volumelemente αdx des construirten Prismas sich ausdehnt, während der Ausdruck rechter Hand auf die beiden Endflächen do_1 und do_2 dieses Prismas Bezug hat.

Denkt man sich den ganzen Innenraum der Fläche O in lauter solche Prismata zerlegt, für jedes derselben die Formel (5.) aufgestellt, und all' diese Formeln summirt, so erhält man, indem man gleichzeitig für α seinen Werth (1.) substituiert, folgende Formel:

$$(6.) \quad \iiint \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \int f \cos(n, x) do,$$

in welcher das Integral links über alle Volumelemente $dx dy dz$ des Innenraumes von O sich ausdehnt, während das Integral rechts über alle Elemente do der Fläche O sich hinstreckt.

Uebrigens kann man in dieser Formel (6.), an Stelle von $\cos(n, x)$, auch $\frac{dx}{dn}$ setzen [vgl. (α.) pg. 194]. Demgemäss gelangt man zu folgendem Satz:

Satz. — Versteht man unter O irgend eine geschlossene Fläche, ferner unter $f = f(x, y, z)$ irgend eine Function, die innerhalb O stetig ist, so gilt die Formel:

$$(7.) \quad \iiint \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \int f \cos(n, x) do = \int f \frac{dx}{dn} do.$$

über den Innenraum von O

Dabei bezeichnet n die äussere Normale der Fläche O .

Ebenso wie die Formel (7.) der x -Axe des Coordinatensystems entspricht, ebenso gelten offenbar analoge Formeln mit Bezug auf die y - und z -Axe. Dieselben lauten:

$$(8.) \quad \iiint \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz = \int f \cos(n, y) do = \int f \frac{dy}{dn} do,$$

über den Innenraum von O

und:

$$(9.) \quad \iiint_{\text{über den Innenraum von } O} \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \int f \cos(n, z) d\sigma = \int f \frac{dz}{dn} d\sigma.$$

Stillschweigend haben wir bisher vorausgesetzt, die geschlossene Fläche O sei von solcher Beschaffenheit, dass sie von einer geraden Linie (z. B. von einer Parallelen zur x -Axe) stets nur in *zwei* Punkten getroffen wird. Wie nun aber die Fläche O auch beschaffen sein mag, stets wird ihr Innenraum durch geeignete Schnittflächen σ in *kleinere Räume* — wir wollen sie *Elementarräume* nennen — zerlegbar sein, der Art, dass die Oberfläche eines jeden solchen Elementarraumes jener Voraussetzung entspricht. Demgemäss wird also z. B. die Formel (7.) correct sein für jeden solchen Elementarraum. Denkt man sich nun aber die Formel (7.) für all' diese Elementarräume wirklich gebildet, und all' diese Formeln zusammenaddirt, so werden die jenen Schnittflächen σ entsprechenden Integraltheile bei dieser Addition *sich gegenseitig aufheben*, wie leicht zu übersehen ist*). Und man wird daher durch diese Addition zu einer Formel gelangen, welche wiederum die in (7.) angegebene Gestalt besitzt.

Die Formel (7.) ist also *allgemein gültig*, von welcher Beschaffenheit die geschlossene Fläche O auch sein mag. Gleiches gilt selbstverständlich von (8.) und (9.).

§. 2.

Aufstellung gewisser allgemeiner Formeln (A.), (B.), (C.).

Es sei O eine gegebene geschlossene Fläche. Ferner seien $U = U(x, y, z)$ und $V = V(x, y, z)$ zwei gegebene Functionen; und zwar sei vorausgesetzt, dass

*) Ist z. B. $d\sigma$ irgend ein Element jener Schnittflächen σ , und sind \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 die zu beiden Seiten von $d\sigma$ vorhandenen Elementarräume, so wird die Formel (7.), gebildet für \mathfrak{R}_1 , ein Glied von der Gestalt

$$(G_1.) \quad f \cos(v_1, x) d\sigma$$

enthalten. Ebenso wird diese Formel (7.), gebildet für \mathfrak{R}_2 , mit einem Gliede von der Gestalt

$$(G_2.) \quad f \cos(v_2, x) d\sigma$$

behaftet sein. Dabei repräsentiren v_1 und v_2 zwei *einander entgegengesetzte* Richtungen. Denn beide Richtungen stehen normal zum Elemente $d\sigma$. Die eine aber repräsentirt die äussere Normale des Raumes \mathfrak{R}_1 , die andere hingegen die äussere Normale von \mathfrak{R}_2 .

Demgemäss werden die beiden Glieder $(G_1.)$ und $(G_2.)$ *entgegengesetzte* Werthe haben, also bei der Addition der in Rede stehenden Formeln *sich gegenseitig aufheben*. — Q. e. d.

$$(10.) \quad U, \quad \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{und} \quad V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

innerhalb O stetig sind. Alsdann gilt offenbar Gleiches innerhalb O auch von dem Ausdruck

$$(11.) \quad f = U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial x};$$

so dass also z. B. der Satz (7.) auf diesen Ausdruck (11.) ohne Weiteres anwendbar ist. Demgemäss erhält man:

$$(12.) \quad \iiint \left(U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) dx dy dz = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{dx}{dn} do.$$

über den Innenraum von O

Ebenso wie diese Formel der x -Axe entspricht, ebenso werden offenbar analoge Formeln gelten mit Bezug auf die y - und z -Axe; so dass man also durch Addition aller drei Formeln erhält:

$$(13.) \quad \iiint (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = \int \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) do.$$

über den Innenraum von O

Demgemäss gelangt man zu folgendem Resultate:

Erster Satz. — *Versteht man unter O eine geschlossene Fläche, ferner unter $U = U(x, y, z)$ und $V = V(x, y, z)$ zwei gegebene Functionen, und setzt man voraus, dass*

$$U, \quad \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{und} \quad V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

innerhalb O stetig sind, so gilt die Formel:

$$(A.) \quad \iiint (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = \int \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) do,$$

über den Innenraum von O

wo n die äussere Normale der Fläche O bezeichnet.

Die hier an $U = U(x, y, z)$ gestellten Anforderungen werden offenbar erfüllt sein, wenn man $U = \text{Const.}$, etwa $= 1$ setzt. In solcher Weise gelangt man zu folgendem

Zusatz. — *Ist eine Function $V = V(x, y, z)$ von solcher Beschaffenheit, dass*

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

innerhalb einer geschlossenen Fläche O stetig sind, so gilt die Formel:

$$(A\alpha.) \quad \iiint \Delta V dx dy dz = \int \frac{dV}{dn} do,$$

über den Innenraum von O

wo n die äussere Normale der Fläche O vorstellt.

Zu einer mit (A.) analogen Formel wird man offenbar auch dann gelangen, wenn man, an Stelle des Innenraumes von O , einen von zwei

Flächen begrenzten *schaalenförmigen Raum* in Betracht zieht. In der That gelangt man durch Zerlegung des *schaalenförmigen Raumes* in einzelne Elementarräume, durch Aufstellung der Formel (A.) für jeden solchen Elementarraum, und durch Addition*) all' dieser Formeln zu folgendem Resultate:

Zweiter Satz. — Repräsentirt O die äussere und Ω die innere Begrenzungsfläche eines gegebenen *schaalenförmigen Raumes*, sind ferner $U = U(x, y, z)$ und $V = V(x, y, z)$ zwei gegebene Functionen, und setzt man voraus, dass

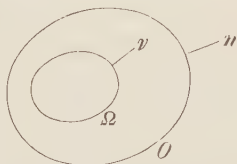
$$U, \quad \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{und} \quad V; \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

innerhalb des *schaalenförmigen Raumes*, d. i. zwischen O und Ω stetig sind, so gilt die Formel:

$$(B.) \quad \iiint_{\text{über den Raum zwischen } O \text{ und } \Omega} (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = + \int \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\omega \\ - \int \left(U \frac{dV}{dv} - V \frac{dU}{dv} \right) d\omega.$$

Dabei bezeichnet n die äussere Normale der Fläche O , und ebenso v die äussere Normale der Fläche Ω . Es ist also n dem *schaalenförmigen Raume* abgewendet, während v in denselben hineinläuft; wie man solches angedeutet findet in der nebenstehenden Figur.

Sind die Functionen U und V von solcher Beschaffenheit, dass sie den ihnen auferlegten Bedingungen auch dann noch entsprechen, wenn man die äussere Begrenzungsfläche O nach allen Seiten hin sich mehr und mehr ausdehnen, und schliesslich in eine *Kugelfläche* von unendlich grossem Radius R übergehen lässt, so wird während dieses Processes die Formel (B.) fortdauernd in Kraft bleiben, und schliesslich die Gestalt annehmen:



$$\iiint_{\text{über den Raum zwischen } O \text{ und } \Omega} (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = + \int \left(U \frac{dV}{dR} - V \frac{dU}{dR} \right) d\omega \\ - \int \left(U \frac{dV}{dv} - V \frac{dU}{dv} \right) d\omega.$$

Setzt man nun voraus, dass das über die Elemente $d\omega$ jener unendlich grossen Kugelfläche ausgedehnte Integral einen bestimmten endlichen Werth habe, etwa $= K$ sei, so gelangt man zu folgendem Satze:

*) Bei dieser Addition werden sich die den Zerlegungsflächen entsprechenden Integraltheile [ähnlich wie früher, Note pg. 197] wiederum gegenseitig aufheben; wie sich solches mittelst des Satzes pg. 195 leicht ergibt.

Dritter Satz. — *Versteht man unter Ω eine geschlossene Fläche, ferner unter $U = U(x, y, z)$ und $V = V(x, y, z)$ zwei gegebene Functionen, und setzt man voraus, dass*

$$U, \quad \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{und} \quad V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

im Aussenraume von Ω überall stetig sind, so gilt die Formel:

$$(C.) \quad \iiint_{\text{über den Aussenraum von } \Omega} (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = K - \int \left(U \frac{dV}{dv} - V \frac{dU}{dv} \right) d\omega,$$

wo v die äussere Normale der Fläche Ω vorstellt [vgl. die vorhergehende Figur].

Dabei hat K den Werth:

$$(C') \quad K = \int \left(U \frac{dV}{dR} - V \frac{dU}{dR} \right) d\omega,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\omega$ einer um irgend welchen Punkt [z. B. um den Anfangspunkt des Coordinatensystems] mit unendlich grossem Radius R beschriebenen Kugelfläche.

In gewissen Fällen ist der Werth von K leicht angebbar. Es sei z. B. $U = \text{Const.}$, etwa $= 1$, und V dasjenige Potential, welches auf den variablen Punkt (x, y, z) ausgeübt wird von irgend welchen *im Endlichen* liegenden festen Massen M . Für *unendlich ferne* Punkte (x, y, z) wird alsdann dieses Potential V von derselben Beschaffenheit sein, als wäre jene Masse M in einem *einzigen* Punkte concentrirt; wobei es einerlei ist, ob man zu diesem Concentrationspunkte den Schwerpunkt der Massen M , oder irgend welchen andern in der Endlichkeit liegenden Punkt auswählt*).

Nimmt man zu diesem Concentrationspunkte den Mittelpunkt der vorhin genannten, mit unendlich grossem Radius R beschriebenen Kugelfläche, so wird das Potential V für solche Punkte (x, y, z) , die auf dieser Kugelfläche liegen, den Werth $\frac{M}{R}$ haben. Substituirt man aber diesen Werth

$$(a.) \quad V = \frac{M}{R}$$

und den hieraus entspringenden Werth

$$(b.) \quad \frac{dV}{dR} = - \frac{M}{R^2}$$

in (C'), und beachtet man, dass $U = 1$, mithin $\frac{dU}{dR} = 0$ sein sollte, so erhält man:

*) Wir werden übrigens später [in § 4 pg. 207] zeigen, wie man diese Betrachtungsweise, die sich weiterhin mehrfach wiederholen wird, durch ein *völlig strenges* Verfahren zu ersetzen im Stande ist.

$$K = - \frac{M}{R^2} \int d\omega,$$

oder, weil $\int d\omega = 4\pi R^2$ ist:

$$(c.) \quad K = - 4\pi M.$$

Demgemäss gewinnt der allgemeine Satz (C.), (C') im gegenwärtigen Falle folgende Gestalt:

Vierter Satz. — *Es sei Ω eine geschlossene Fläche. Ferner sei $V = V(x, y, z)$ dasjenige Potential, welches auf den variablen Punkt (x, y, z) ausgeübt wird von irgend welchen im Endlichen liegenden Massen M . Ueberdies sei vorausgesetzt, dass*

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

im Aussenraume von Ω überall stetig sind. Alsdann gilt die Formel:

$$(C\alpha.) \quad \iiint_{\text{über den Aussenraum von } \Omega} \Delta V dx dy dz = - 4\pi M - \int \frac{dV}{dv} d\omega,$$

wo v die äussere Normale der Fläche Ω vorstellt.

Bemerkung. — *Sollten die Massen M zufälliger Weise vollständig innerhalb Ω liegen, so würde ΔV [Satz (G.) pg. 9] im Aussenraume von Ω überall $= 0$ sein, mithin die linke Seite der Formel (C α .) ebenfalls $= 0$ sein.*

Wir wollen jetzt ferner den allgemeinen Satz (C.), (C') auf den Fall in Anwendung bringen, dass die Functionen U und V beide Potentiale sind. Es sei nämlich U das Potential irgend welcher Massen M_1 , und V das Potential irgend welcher andern Massen M_2 . Auch sei vorausgesetzt, dass all' diese Massen M_1 und M_2 im Endlichen liegen. Alsdann erhält man folgende mit den früheren Formeln (a.), (b.) analoge Formeln:

$$(f.) \quad U = \frac{M_1}{R}, \quad V = \frac{M_2}{R},$$

$$(g.) \quad \frac{dU}{dR} = - \frac{M_1}{R^2}, \quad \frac{dV}{dR} = - \frac{M_2}{R^2};$$

so dass also die Formel (C') übergeht in:

$$K = - M_1 M_2 \int \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R^3} \right) d\omega,$$

d. i. in:

$$(h.) \quad K = 0.$$

Demgemäss*) nimmt also der Satz (C.), (C') im gegenwärtigen Falle folgende Gestalt an:

*) Auch diese Betrachtungsweise kann durch eine strengere ersetzt werden [vgl. den § 4 pg. 207].

Fünfter Satz. — *Es sei Ω eine geschlossene Fläche. Ferner seien $U = U(x, y, z)$ und $V = V(x, y, z)$ die Potentiale zweier Massensysteme M_1 und M_2 , deren jedes im Endlichen liegt. Ueberdies sei vorausgesetzt, dass*

$$U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{und} \quad V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$$

im Aussenraume von Ω überall stetig sind. Alsdann gilt die Formel:

$$(C\beta.) \quad \iiint_{\text{über den Aussenraum von } \Omega} (U\Delta V - V\Delta U) dx dy dz = - \int \left(U \frac{dV}{dv} - V \frac{dU}{dv} \right) d\omega,$$

wo v die äussere Normale der Fläche Ω vorstellt.

Bemerkung. — *Sollten zufälliger Weise die Massensysteme M_1 und M_2 vollständig innerhalb Ω liegen, so würde die linke Seite der vorstehenden Formel offenbar $= 0$ sein.*

Wir wollen schliesslich noch die Sätze (A α .) und (C α .) auf einen besonders einfachen Fall in Anwendung bringen. Es sei nämlich V das Potential irgend welcher Massen M . Liegen diese Massen M *ausserhalb* einer gegebenen geschlossenen Fläche Ω , so ergibt sich aus (A α .), falls man die dortigen Buchstaben O, o, n durch Ω, ω, v ersetzt:

$$\iiint_{\text{über den Innenraum von } \Omega} \Delta V dx dy dz = \int \frac{dV}{dv} d\omega,$$

also, weil die Massen M *ausserhalb* Ω liegen sollen, mithin ΔV *innerhalb* Ω überall $= 0$ ist:

$$(x.) \quad 0 = \int \frac{dV}{dv} d\omega.$$

Liegen andererseits die Massen M *innerhalb* Ω , so folgt aus (C α .):

$$\iiint_{\text{über den Aussenraum von } \Omega} \Delta V dx dy dz = -4\pi M - \int \frac{dV}{dv} d\omega,$$

also, weil die Massen M *innerhalb* Ω liegen sollen, mithin ΔV *ausserhalb* Ω überall $= 0$ ist:

$$(y.) \quad 0 = -4\pi M - \int \frac{dV}{dv} d\omega.$$

Diese Formeln (x.), (y.) enthalten folgenden Satz:

Sechster Satz. — *Versteht man unter V das Potential irgend welcher Massen M , so wird das über alle Elemente $d\omega$ einer geschlossenen Fläche Ω ausgedehnte Integral*

$$(D.) \quad \int \frac{dV}{dv} d\omega$$

$= 0$ sein, falls die Massen M vollständig ausserhalb Ω liegen, hingegen $= -4\pi M$ sein, falls dieselben vollständig innerhalb Ω sich befinden. Dabei bezeichnet v die äussere Normale der Fläche Ω .

Lässt man schliesslich die gegebenen Massen M sich reduciren auf einen einzigen materiellen Punkt von der Masse Eins, so geht dieser Satz in folgenden über:

Siebenter Satz. — *Bezeichnet man die einzelnen Elemente einer geschlossenen Fläche Ω mit $d\omega$, und die Abstände dieser Elemente $d\omega$ von irgend einem festen Punkte (a, b, c) mit E , so wird das über Ω ausgedehnte Integral*

$$(E.) \quad \int \frac{d}{dv} \frac{1}{E} d\omega$$

= 0 sein, falls der Punkt (a, b, c) ausserhalb Ω liegt, hingegen = -4π sein, falls (a, b, c) innerhalb Ω sich befindet. Dabei bezeichnet v die äussere Normale der Fläche Ω .

Bemerkung. — Man kann übrigens diesen letzten Satz leicht *direct* beweisen. Der unter dem Integral stehende Ausdruck ist nämlich folgendermassen darstellbar:

$$\frac{d}{dv} \frac{1}{E} d\omega = - \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dv} d\omega = - \frac{1}{E^2} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dv} + \frac{\partial E}{\partial z} \frac{dz}{dv} \right) d\omega,$$

wo (x, y, z) die Coordinaten des Elementes $d\omega$ vorstellen, so dass also $E^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ ist. Hieraus folgt mit Rücksicht auf (α.) pg. 194:

$$\frac{d}{dv} \frac{1}{E} d\omega = + \frac{1}{E^2} \left(\frac{a-x}{E} \cos(v, x) + \frac{b-y}{E} \cos(v, y) + \frac{c-z}{E} \cos(v, z) \right) d\omega,$$

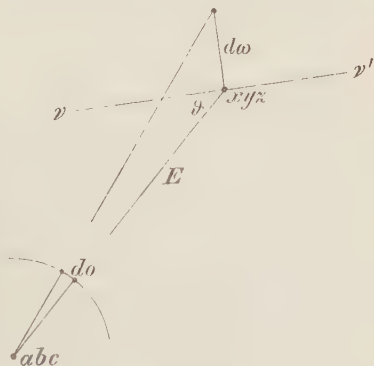
oder, was dasselbe ist:

$$(u.) \quad \frac{d}{dv} \frac{1}{E} d\omega = + \frac{\cos \vartheta \cdot d\omega}{E^2},$$

wo ϑ denjenigen Winkel bezeichnet, unter welchem die von (x, y, z) , d. i. von $d\omega$ nach (a, b, c) laufende Richtung E gegen die Normale v geneigt ist. Hieraus folgt sofort:

$$(v.) \quad \frac{d}{dv} \frac{1}{E} d\omega = + d\sigma,$$

wo $d\sigma$ die *Oeffnung* des von (a, b, c) nach der Peripherie von $d\omega$ gelegten Kegels, d. i. dasjenige *Flächenelement* vorstellt, welches dieser Kegel aus einer um (a, b, c) mit dem Radius *Eins* beschriebenen Kugelfläche ausschneidet.



Diese Formeln (u.), (v.) gelten indessen *nicht* allgemein. Hat nämlich, während sonst alles beim Alten bleiben soll, die Normale des Elementes $d\omega$ die entgegengesetzte, in der Figur mit v' bezeichnete Richtung, so erhält man, statt (u.), folgende Formel:

$$(u'.) \quad \frac{d \frac{1}{E'}}{dv'} d\omega = + \frac{\cos \vartheta' \cdot d\omega}{E^2},$$

wo ϑ' den Winkel von E gegen v' vorstellt. Dieser Winkel ϑ' ist aber *stumpf*, und $= \pi - \vartheta$, mithin $\cos \vartheta' = -\cos \vartheta$. Und demgemäss folgt aus (u'.):

$$(v'.) \quad \frac{d \frac{1}{E}}{dv} d\omega = - d\sigma,$$

wo $d\sigma$ genau dieselbe Bedeutung hat wie vorhin, in (v.).

Man kann dieses $d\sigma$ die *scheinbare Grösse* des Elementes $d\omega$ für einen in (a, b, c) befindlichen Beobachter nennen; und alsdann den Inhalt der beiden Formeln (v.) und (v'.) in folgenden Satz zusammenfassen:

Satz. *Bezeichnet E den Abstand des Punktes (a, b, c) vom Flächenelemente $d\omega$, und v eine bestimmte Normale dieses Elementes, so wird*

$$(w.) \quad \frac{d \frac{1}{E}}{dv} d\omega = \pm d\sigma$$

sein, wo $d\sigma$ die scheinbare Grösse des Elementes $d\omega$ für einen in (a, b, c) befindlichen Beobachter bezeichnet. Dabei ist das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen, je nachdem der Punkt (a, b, c) und die Normale v auf derselben Seite des Elementes $d\omega$, oder auf verschiedenen Seiten desselben gelegen sind.

Unter Zugrundelegung dieses einfachen Satzes (w.) ergibt sich nun der eigentlich zu beweisende Satz (E.) durch unmittelbare geometrische Anschauung; was weiter auszuführen überflüssig sein würde.

§ 3.

Sich anschliessende Sätze.

Ausserhalb der geschlossenen Fläche O seien irgend welche Massen M gegeben, und das Potential dieser Massen auf den variablen Punkt (x, y, z) sei mit W bezeichnet. Alsdann wird der Satz (A.) pg. 198 sofort anwendbar sein auf

$$U = 1 \quad \text{und} \quad V = \frac{W^2}{2}; \quad .$$

wodurch man erhält:

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + W \Delta W \right] dx dy dz = \int W \frac{dW}{dn} d\sigma.$$

über den Innenraum von O

Die Massen M sollen aber *ausserhalb* O liegen. Demgemäss wird ΔW *innerhalb* O überall $= 0$ sein, so dass also in der vorstehenden Formel das mit ΔW behaftete Glied verschwindet, mithin folgendes Resultat entsteht:

Erster Satz. — *Versteht man unter M irgend welche Massen, die ausserhalb der geschlossenen Fläche O , oder auch auf derselben sich befinden, so gilt für das von diesen Massen M auf einen variablen Punkt (x, y, z) ausgeübte Potential W die Formel:*

$$(21.) \quad \iiint \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \int W \frac{dW}{dn} d\sigma,$$

über den Innenraum von O

wo n die äussere Normale der Fläche O vorstellt.

Wir wollen jetzt annehmen, das Potential W sei von solcher Beschaffenheit, dass es für alle auf der Fläche O liegenden Punkte *verschwindet*. Alsdann verschwindet in (21.) die *rechte* Seite, mithin auch die *linke*. Aus dem Verschwinden dieser linken Seite folgt sofort, dass

$$\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial z}$$

innerhalb O überall $= 0$ sind, dass mithin W selber *innerhalb* O *constant* ist. Der Werth dieser Constanten kann aber, weil W , nach unserer Voraussetzung, auf O verschwindet, kein anderer als 0 sein; so dass wir also zu folgendem Resultate gelangen:

Zweiter Satz. — *Bezeichnet O eine geschlossene Fläche, ferner W das Potential irgend welcher Massen M , die theils ausserhalb O , theils auf O ausgebreitet sind, und nimmt man an, dass dieses Potential W auf O überall $= 0$ ist, so wird dasselbe auch *innerhalb* O *allenthalben* $= 0$ sein.*

Um den Satz zu verallgemeinern, stellen wir uns die Aufgabe, das Potential W irgend welcher theils *ausserhalb* O , theils *auf* O ausgebreiteter Massen M für den Fall zu untersuchen, dass der Werth dieses Potentials *auf* O nicht $= 0$, sondern $= k$ ist, wo k irgend welche Constante vorstellen soll.

Man construiren eine die Fläche O umschliessende Hilfskugelfläche O' vom Radius A' , und denke sich diese Kugelfläche *gleichförmig* mit Masse belegt, und zwar der Art, dass die Gesamtmasse M' der Belegung $= -kA'$ ist, wo k jene gegebene Constante vorstellen soll.

Das Potential W' dieser Belegung M' besitzt alsdann in Bezug auf alle Punkte *innerhalb* O' , mithin z. B. auch in Bezug auf alle Punkte *auf und innerhalb* O , ein und denselben constanten Werth, nämlich den Werth*): $\frac{M'}{A'} = -k$.

Demgemäss repräsentirt die Summe $W + W'$ ein Potential, dessen erzeugende Massen M, M' theils auf, theils ausserhalb O liegen, und dessen Werth auf O überall $= k - k = 0$ ist, — also ein Potential, welches, nach dem vorhergehenden Satze, auch *innerhalb* O überall $= 0$ sein muss. Mit andern Worten: Man gelangt zu dem Resultate, dass W innerhalb O überall $= -W'$, d. i. $= +k$ ist, also zu folgendem Satze:

Dritter Satz. — Bezeichnet O eine geschlossene Fläche, ferner W das Potential irgend welcher Massen M , die theils ausserhalb O , theils auf O ausgebreitet sind, und nimmt man an, dass dieses Potential auf O constant, etwa $= k$ ist, so wird dasselbe auch *innerhalb* O überall $= k$ sein.

Wir gehen über zu *anderen* Betrachtungen, die den soeben angestellten ziemlich parallel stehen. — Innerhalb der geschlossenen Fläche Ω seien irgend welche Massen M gegeben; und das Potential dieser Massen auf den variablen Punkt (x, y, z) sei mit W bezeichnet. Alsdann wird der Satz (C.), (C') pg. 200 anwendbar sein auf

$$U = 1 \quad \text{und} \quad V = \frac{W^2}{2};$$

wodurch man erhält:

$$(1.) \quad \iiint \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + W \Delta W \right] dx dy dz =$$

über den Aussenraum von Ω

$$= K - \int W \frac{dW}{dv} d\omega;$$

dabei hat alsdann K die Bedeutung:

$$(2.) \quad K = \int W \frac{dW}{dR} d\sigma,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ einer um irgend welchen Punkt mit dem *unendlich grossen* Radius R beschriebenen Kugelfläche.

Das Element $d\sigma$ ist also *unendlich fern*, folglich ist der Werth des Potentials W in diesem Elemente $d\sigma$ folgendermassen darstellbar:

*) Vgl. die Formel (γ .) pg. 172, und überdies auch die Erläuterungen am Schlusse dieses Werkes.

$$W = \frac{M}{R},$$

[vgl. (a.) pg. 200]. Hieraus folgt:

$$\frac{dW}{dR} = -\frac{M}{R^2}.$$

Demgemäss ergibt sich aus (2.):

$$(3.) \quad K = -\frac{M^2}{R^3} \int d\sigma,$$

also, weil $\int d\sigma = 4\pi R^2$ ist:

$$(4.) \quad K = -\frac{4\pi M^2}{R},$$

also, weil $R = \infty$ ist:

$$(5.) \quad K = 0.$$

Beachtet man nun, dass die Massen M innerhalb Ω liegen sollen, dass mithin in (1.) das mit ΔW behaftete Glied *verschwindet*, so gelangt man auf Grund der Formeln (1.) und (5.) zu folgendem Satze:

Vierter Satz. — *Versteht man unter M irgend welche Massen, die innerhalb der geschlossenen Fläche Ω , oder vielleicht auch auf derselben sich befinden, so gilt für das von diesen Massen auf einen variablen Punkt (x, y, z) ausgeübte Potential W die Formel:*

$$(6.) \quad \iiint \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = - \int W \frac{dW}{dv} d\omega,$$

über den Aussenraum von Ω

wo v die äussere Normale der Fläche Ω vorstellt.

Dieser Satz führt, falls man annimmt, W sei auf der Fläche Ω überall $= 0$, zu ähnlichen Folgerungen, wie sie sich vorhin aus dem ersten Satze ergaben, so dass man also zu folgendem weiteren Satze gelangt:

Fünfter Satz. — *Bezeichnet Ω eine geschlossene Fläche, ferner W das Potential irgend welcher Massen M , die theils innerhalb Ω , theils auf Ω ausgebreitet sind, und setzt man voraus, dass dieses Potential auf Ω überall $= 0$ ist, so wird dasselbe auch ausserhalb Ω allenthalben $= 0$ sein.*

§ 4.

Angabe einer strengeren Methode für gewisse in den beiden letzten Paragraphen angestellte Betrachtungen.

Wir haben früher [pg. 200] das über eine Kugelfläche O von unendlich grossem Radius R ausgedehnte Integral

$$(1.) \quad K = \int \left(U \frac{dV}{dR} - V \frac{dU}{dR} \right) d\sigma$$

für den Fall berechnet, dass $U = 1$ ist, und V das Potential irgend welcher endlicher Massen M vorstellt. Wir wollen gegenwärtig zur Berechnung dieses Integrals eine *strengere* Methode einschlagen, indem wir dabei den Radius R zunächst als *endlich*, dabei aber als *so gross* uns denken, dass jene Massen M vollständig *innerhalb* der Kugelfläche O liegen.

Da $U = 1$ sein soll, so reducirt sich die Formel (1.) auf:

$$(2.) \quad K = \int \frac{dV}{dR} d\sigma.$$

Betrachtet man die innerhalb O liegenden Massen M als ein System einzelner Massenpunkte m_1, m_2, \dots, m_H , so ist:

$$(3.) \quad V = \sum_{h=1}^H \frac{m_h}{E_h},$$

wo E_h den Abstand des variablen Punktes (x, y, z) von m_h vorstellt.

Man führe nun ein Polarcoordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt im Centrum der Kugelfläche O liegt, und denke sich den variablen Punkt (x, y, z) auf dieser Kugelfläche gelegen. Demgemäss bezeichne man die Polarcoordinaten der Punkte (x, y, z) und m_h resp. mit (R, μ, φ) und (r_h, μ_h, φ_h) . Alsdann ist $r_h < R$, also [vgl. pg. 46]:

$$\frac{1}{E_h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_h^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \gamma_h),$$

wo γ_h die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen (μ, φ) und (μ_h, φ_h) repräsentirt. Somit folgt aus (3.):

$$(4.) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\mu, \varphi)}{R^{n+1}},$$

wo alsdann $Y_n(\mu, \varphi)$ und insbesondere $Y_0(\mu, \varphi)$ die Bedeutungen besitzen:

$$(5.) \quad Y_n(\mu, \varphi) = \sum_{h=1}^H [m_h r_h^n P_n(\cos \gamma_h)],$$

$$(6.) \quad Y_0(\mu, \varphi) = \sum_{h=1}^H [m_h] = M;$$

dabei bezeichnet M die *Gesamtmasse* des gegebenen Systems m_1, m_2, \dots, m_H . Die Function $P_n(\cos \gamma_h)$ ist eine *Kugelfunction* n^{ter} Ordnung von μ, φ . Gleiches gilt daher, nach (5.), auch von $Y_n(\mu, \varphi)$.

Substituirt man nun in (2.) für V den Werth (4.), und gleichzeitig für $d\sigma$ den bekannten Ausdruck $R^2 d\mu d\varphi$, so erhält man:

$$(7.) \quad K = - \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) Y_n(\mu, \varphi)}{R^n} \right) d\mu d\varphi.$$

Das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_n(\mu, \varphi) d\mu d\varphi$$

ist aber [vgl. (Ia.) pg. 77] stets $= 0$, ausser für $n = 0$. Somit folgt aus (7.):

$$(8.) \quad K = - \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_0(\mu, \varphi) d\mu d\varphi,$$

also mit Rücksicht auf (6.):

$$(9.) \quad K = -4\pi M.$$

Diese Formel wird offenbar gültig bleiben, wenn man nachträglich den Radius R noch weiter vergrössert, z. B. ins Unendliche anwachsen lässt; so dass wir hier also zu genau demselben Resultate gelangt sind, wie früher auf pg. 201 in (c.) — *Q. e. d.*

In genau derselben Weise kann man einen strengeren Beweis liefern für die Formel (h.) pg. 201 und für die Formel (5.) pg. 207.

§ 5.

Beweis dafür, dass der elektrische Gleichgewichtszustand durch die aus der Theorie abgeleiteten Formeln eindeutig bestimmt ist.

Wirken auf einen isolirten Conductor, der mit der *gegebenen* Electricitätsmenge M geladen ist, von Aussen her Kräfte ein, deren Potential F ebenfalls *gegeben* ist, so gelten für die *unbekannte* Dichtigkeit ε der auf dem Conductor entstehenden elektrischen Belegung die beiden Gleichungen [vgl. pg. 161]:

$$(1.) \quad \int \varepsilon d\sigma = M,$$

$$(2.) \quad F_i + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} = G,$$

wo G eine noch *unbekannte* Constante bezeichnet.

Es fragt sich, ob ε und G durch diese beiden Gleichungen eindeutig bestimmt sind. Um hierauf näher einzugehen, wollen wir einstweilen *annehmen*, die Gleichungen (1.), (2.) liessen *zwei* Lösungen zu: ε , G und ε' , G' , und die Consequenzen untersuchen, welche aus einer solchen Annahme sich ergeben.

Denkt man sich in jenen Gleichungen (1.), (2.) successive die Lösung ε , G und die Lösung ε' , G' substituirt, und die so entstehenden Formeln von einander subtrahirt, so erhält man:

$$(3.) \quad \int (\varepsilon - \varepsilon') do = 0,$$

$$(4.) \quad W_i = \int \frac{(\varepsilon - \varepsilon') do}{E_i} = (G - G'),$$

wo W_i als Abbreviatur dienen soll für die *linke* Seite der letzten Gleichung. Dieses W_i repräsentirt alsdann offenbar das Potential der Oberflächenbelegung $(\varepsilon - \varepsilon')$ auf Punkte i *innerhalb* des Conductors. Bezeichnet man das Potential dieser selben Oberflächenbelegung auf Punkte a *ausserhalb* des Conductors mit W_a , so ist bekanntlich [vgl. (12.) pg. 173 und (11.) pg. 171]:

$$\begin{aligned} \bar{W}_a &= \bar{W}_i, \quad \text{und} \\ \frac{d\bar{W}_a}{dn} - \frac{d\bar{W}_i}{dn} &= -4\pi(\varepsilon - \varepsilon'), \end{aligned}$$

wo n die äussere Normale der Conductoroberfläche O vorstellt, und $\varepsilon - \varepsilon'$ den Werth von $\varepsilon - \varepsilon'$ im Fusspunkte dieser Normale bezeichnet. Diese beiden Relationen sind, weil W_i [nach (4.)] *constant*, $= G - G'$ ist, auch so darstellbar:

$$(5.) \quad \bar{W}_a = \bar{W}_i = G - G',$$

$$(6.) \quad \frac{d\bar{W}_a}{dn} = -4\pi(\varepsilon - \varepsilon').$$

Bringt man nun den Satz (℄.) pg. 207 auf das Potential W_a in Anwendung, so folgt:

$$(7.) \quad \iiint \left[\left(\frac{\partial W_a}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_a}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_a}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = - \int W_a \frac{dW_a}{dn} do.$$

über den Aussenraum des Conductors

Die *rechte* Seite dieser Formel ist aber nach (5.) und (6.)

$$= +4\pi(G - G') \int (\varepsilon - \varepsilon') do,$$

also nach (3.)

$$= 0.$$

Folglich wird die *linke* Seite der Formel (7.) ebenfalls $= 0$ sein. Hieraus ergibt sich, dass

$$\frac{\partial W_a}{\partial x}, \quad \frac{\partial W_a}{\partial y}, \quad \frac{\partial W_a}{\partial z}$$

im Aussenraume des Conductors überall verschwinden müssen, dass also W_a selber in diesem Aussenraume *constant* sein muss. Demgemäss ergibt sich aus (6.): $\varepsilon - \varepsilon' = 0$, d. i.

$$(8.) \quad \varepsilon = \varepsilon',$$

und sodann aus (4.):

$$(9.) \quad G = G'.$$

Die zu Anfang gemachte Supposition, dass die Gleichungen (1.), (2.) zwei Lösungen: ε , G und ε' , G' besitzen, führt also mit Nothwendigkeit zu dem Resultate, dass diese beiden Lösungen *unter einander identisch* sind, dass also in Wirklichkeit nur *eine* Lösung existiren kann. Also der Satz:

Erstes Theorem. — *Wirken auf einen isolirten Conductor, der mit der gegebenen Elektricitätsmenge M geladen ist, von Aussen her Kräfte ein, deren Potential F ebenfalls gegeben ist, so gelten für die unbekannte Dichtigkeit ε der auf dem Conductor entstehenden elektrischen Belegung die Gleichungen*

$$(10.) \quad \int \varepsilon d\sigma = M, \\ F_i + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} = \text{Const.},$$

wo unter Const. eine noch unbekannte Constante zu verstehen ist.

Und zwar wird ε durch diese beiden Gleichungen eindeutig bestimmt sein. Ist also eine Function ε gefunden, die, in Verbindung mit irgend welcher Const., den beiden Gleichungen entspricht, so wird man sicher sein, dass diese Function ε wirklich diejenige Belegung repräsentirt, welche unter den gegebenen Umständen eintritt.

Mit gleicher Leichtigkeit, oder vielmehr noch einfacher, gelangt man zu folgendem zweiten Satze:

Zweites Theorem. — *Wirken auf einen zur Erde abgeleiteten Conductor von Aussen her Kräfte ein, deren Potential F gegeben ist, so gilt für die unbekannte Dichtigkeit ε der auf dem Conductor entstehenden elektrischen Belegung folgende Gleichung:*

$$(11.) \quad F_i + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} = 0, \text{ [vgl. pg. 161].}$$

Und zwar wird ε durch diese Gleichung eindeutig bestimmt sein. Ist also eine dieser Gleichung Genüge leistende Function ε gefunden, so wird man sicher sein, dass diese Function ε wirklich diejenige Belegung repräsentirt, welche unter den gegebenen Umständen eintritt.

Aus der Gleichung (11.) ergibt sich nämlich, falls man zwei Lösungen: ε und ε' voraussetzt, folgende Formel:

$$W_i = \int \frac{(\varepsilon - \varepsilon') d\sigma}{E_i} = 0,$$

wo W_i nur als Abbreviatur dienen soll zur Bezeichnung der linken Seite. Hieraus folgt weiter:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_i = 0.$$

Und hieraus ergibt sich, falls man wiederum die Formel (7.) anwendet,

dass die *rechte* Seite dieser Formel *verschwindet*. Folglich wird die *linke* Seite derselben ebenfalls verschwinden, mithin W_a im Aussenraume des Conductors *constant* sein. Und demgemäss wird die der Gleichung

$$\frac{dW_a}{dn} = -4\pi(\varepsilon - \varepsilon')$$

unterworfenen Differenz $(\varepsilon - \varepsilon')$ den Werth *Null* haben. — *Q. e. d.*

Schaalenförmiger Conductor. — Wirken auf einen *isolirten* schaaalenförmigen Conductor, der mit der *gegebenen Elektrizitätsmenge* M geladen ist, irgend welche Kräfte ein, die ihren Sitz theils im *Aussenraume*, theils im *innern Hohlraume* des Conductors haben können, so wird nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes *freie* Elektrizität nur an den beiden *Oberflächen* O und Ω des Conductors anzutreffen sein, wie sich solches aus der früher dargelegten allgemeinen Theorie ohne Weiteres ergibt. Auch wird zur Zeit des Gleichgewichts, wie ebenfalls aus jener Theorie folgt, das elektrische Gesamtpotential in Bezug auf alle *innern* Punkte des Conductors, d. i. in Bezug auf alle *zwischen* O und Ω gelegenen Punkte, *constant* sein. Demgemäss ergeben sich für die Dichtigkeiten ε und η der auf O und Ω entstehenden elektrischen Belegungen folgende Gleichungen:

$$(1.) \quad \int \varepsilon d\sigma + \int \eta d\omega = M,$$

$$(2.) \quad F_i + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} + \int \frac{\eta d\omega}{E_i} = G,$$

wo G eine noch *unbekannte* Constante vorstellt. Dabei repräsentirt i jeden beliebigen Punkt des Conductors, d. i. jeden beliebigen Punkt zwischen O und Ω , und F_i das von jenen gegebenen Kräften auf i ausgeübte Potential. Um die Vorstellung zu fixiren, mag O als die *äussere*, mithin Ω als die *innere* Begrenzungsfläche des Conductors gedacht werden.

Wir legen uns nun die Frage vor, ob ε , η , G durch die Gleichungen (1.), (2.) *eindeutig bestimmt* sind. Um hierauf näher einzugehen, wollen wir einstweilen *annehmen*, die Gleichungen (1.), (2.) liessen *zwei* Lösungen zu: ε , η , G und ε' , η' , G' , und die Consequenzen entwickeln, welche aus einer solchen Annahme entspringen.

Denkt man sich in den Gleichungen (1.), (2.) successive die eine und die andere Lösung substituirt, und die so entstehenden Formeln von einander subtrahirt, so erhält man:

$$(3.) \quad \int (\varepsilon - \varepsilon') d\sigma + \int (\eta - \eta') d\omega = 0,$$

$$(4.) \quad W_i = \int \frac{(\varepsilon - \varepsilon') d\sigma}{E_i} + \int \frac{(\eta - \eta') d\omega}{E_i} = G - G',$$

wo das zugefügte W_i nur als Abbreviatur dienen soll für die *linke* Seite der Formel.

Dieses W_i repräsentirt alsdann offenbar das Potential der beiden Belegungen $(\varepsilon - \varepsilon')$ und $(\eta - \eta')$ auf beliebige Punkte i zwischen O und Ω . Bezeichnet man*) das Potential der nämlichen beiden Belegungen auf Punkte a *ausserhalb* O , und auf Punkte α *innerhalb* Ω respective mit W_o und W_α , so ergeben sich, auf Grund bekannter Sätze [vgl. (12.) pg. 173 und (11.) pg. 171], *einerseits* die Formeln:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_i \quad \text{und} \quad \overline{W}_\alpha = \overline{W}_i;$$

woraus mit Rücksicht auf (4.) entsteht:

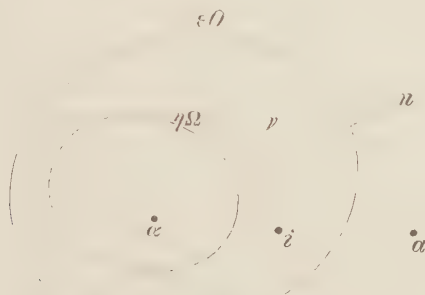
$$(5.) \quad \overline{W}_a = W_a = W_i = (G - G');$$

und *andererseits* auch folgende Formeln:

$$(6.) \quad \frac{dW_a}{dn} = -4\pi(\varepsilon - \varepsilon'),$$

$$(7.) \quad \frac{dW_\alpha}{dv} = +4\pi(\eta - \eta'),$$

wo n die *äussere* Normale von O , und v die *äussere* Normale von Ω vorstellt [vgl. die Figur].



Bringt man jetzt die Sätze (C.) pg. 207 und (Q.) pg. 205 respective auf die Potentiale W_a und W_α in Anwendung, so ergibt sich:

$$(8.) \quad \iiint \left[\left(\frac{\partial W_a}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_a}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_a}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = - \int W_a \frac{dW_a}{dn} d\sigma,$$

über den Aussenraum von O

*) Es werden hier sämmtliche Punkte des unendlichen Raumes in *drei Kategorien* gebracht, nämlich eingetheilt in die Punkte a *ausserhalb* O , ferner in die Punkte i *zwischen* O und Ω , endlich in die Punkte α *innerhalb* Ω .

$$(9.) \iiint \left[\left(\frac{\partial W_\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_\alpha}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_\alpha}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = + \int W_\alpha \frac{dW_\alpha}{dv} d\omega,$$

über den Innenraum von Ω

wo wiederum n die äussere Normale von O , und v die äussere Normale von Ω bezeichnet. Addirt man aber die beiden Gleichungen (8.) und (9.), so wird die rechte Seite der so entstehenden Formel, mit Rücksicht auf (5.), (6.), (7.), lauten:

$$4\pi(G - G') \int (\varepsilon - \varepsilon') d\sigma + 4\pi(G - G') \int (\eta - \eta') d\omega,$$

also nach (3.) gleich Null sein. Folglich ist die linke Seite derselben ebenfalls gleich Null. Und hieraus folgt sofort, dass W_α im Aussenraume von O , und W_α im Innenraume von Ω constant sind; so dass also die Gleichungen (6.), (7.) übergehen in:

$$(10.) \quad 0 = \varepsilon - \varepsilon',$$

$$(11.) \quad 0 = \eta - \eta'.$$

Es ergibt sich also: $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\eta = \eta'$, und sodann aus (4.): $G = G'$.

Unsere anfängliche Supposition, dass die Gleichungen (1.), (2.) zwei Lösungen: ε, η, G und ε', η', G' , besässen, führt also mit Nothwendigkeit zu dem Resultate, dass diese beiden Lösungen unter einander identisch sind, dass also jene Gleichungen in Wirklichkeit nur eine Lösung besitzen. Also der Satz:

Drittes Theorem. — *Es sei gegeben ein schalenförmiger Conductor mit der äussern Begrenzungsfläche O , und der innern Begrenzungsfläche Ω . Denkt man sich diesen Conductor isolirt, mit der gegebenen Elektricitätsmenge M geladen, und der Wirkung irgend welcher Kräfte ausgesetzt, die ihren Sitz theils ausserhalb O , theils innerhalb Ω haben können, und deren Potential mit F bezeichnet sein mag, so gelten für die unbekannten Dichtigkeiten ε und η der auf O und Ω entstehenden elektrischen Belegungen die Gleichungen:*

$$(12.) \quad \int \varepsilon d\sigma + \int \eta d\omega = M,$$

$$F_i + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} + \int \frac{\eta d\omega}{E_i} = \text{Const.},$$

wo die Const. unbekannt ist, und i jeden beliebigen Punkt zwischen O und Ω vorstellt.

Durch diese beiden Gleichungen sind ε und η eindeutig bestimmt. Sind also irgend zwei Functionen ε und η gefunden, die in Verbindung mit irgend einer noch zu bestimmenden Const. den beiden Gleichungen Genüge leisten, so wird man sicher sein, dass diese Functionen ε

und η wirklich diejenigen elektrischen Belegungen repräsentiren, welche unter den gegebenen Umständen eintreten.

Zu diesem Satze kann noch folgender hinzugefügt werden, der sich in ganz ähnlicher Art beweisen lässt:

Viertes Theorem. — Ist der betrachtete schalenförmige Conductor nicht isolirt, sondern zur Erde abgeleitet, so ergiebt sich für ε und η die Gleichung:

$$(13.) \quad F_i + \int \frac{\varepsilon do}{E_i} + \int \frac{\eta d\omega}{E_i} = 0.$$

Und durch diese Gleichung sind ε und η wiederum eindeutig bestimmt. Sind also irgend zwei diese Gleichung erfüllende Functionen ε und η gefunden, so wird man sicher sein, dass dieselben wirklich diejenigen elektrischen Belegungen repräsentiren, welche unter den gegebenen Umständen eintreten.

Die in diesem Paragraph aufgestellten Theoreme sind leicht ausdehnbar auf ein System von beliebig vielen Conductoren; worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden soll.

§ 6.

Einige Anwendungen der soeben aufgestellten Theoreme.

Es sei gegeben ein *isolirter* Conductor, auf den von Aussen her *keinerlei* Kräfte einwirken. Und es mögen diejenigen beiden elektrostatischen Probleme betrachtet werden, welche sich ergeben, wenn man diesem Conductor einmal die Ladung M , das andere Mal die Ladung M' zuertheilt.

Die diesen beiden Problemen entsprechenden Gleichungen lauten alsdann, nach (10.) pg. 211, folgendermassen:

$$(A.) \quad \begin{cases} \int \varepsilon do = M, \\ \int \frac{\varepsilon do}{E_i} = \text{Const.}, \end{cases} \quad (A'.) \quad \begin{cases} \int \varepsilon' do = M', \\ \int \frac{\varepsilon' do}{E_i} = \text{Const.} \end{cases}$$

Repräsentirt nun ε diejenige Belegung, welche im ersten Fall *wirklich* eintritt, so wird dieses ε den Gleichungen (A.) genügen. Folglich wird der Ausdruck $\varepsilon' = \frac{M'}{M} \varepsilon$ den Gleichungen (A'.) Genüge leisten. Und hieraus ergiebt sich, auf Grund des ersten Theorems, dass dieser Ausdruck

$$\varepsilon' = \frac{M'}{M} \varepsilon$$

diejenige Belegung repräsentirt, welche im zweiten Fall *wirklich* eintritt; so dass wir also folgenden Satz haben:

Proportionalitätssatz. — Denkt man sich einen isolirten Conductor, auf den von Aussen her keinerlei Kräfte einwirken, einmal mit der Elektricitätsmenge M , das andere Mal mit der Elektricitätsmenge M' geladen, und die Dichtigkeiten der in diesen beiden Fällen eintretenden Belegungen mit ε und ε' bezeichnet, so werden ε und ε' nur durch einen constanten Factor verschieden sein, nämlich der Proportion entsprechen: $\varepsilon : \varepsilon' = M : M'$.

Wir wollen jetzt annehmen, der *isolirte* Conductor sei der Einwirkung irgend welcher Kräfte ausgesetzt, deren Potential F gegeben ist, und diejenigen elektrischen Probleme betrachten, welche sich ergeben, wenn man diesem Conductor einmal die Ladung M , das zweite Mal die Ladung M' , das dritte Mal die Ladung M'' zuertheilt.

Die diesen drei Problemen entsprechenden Gleichungen lauten, nach (10.) pg. 211, folgendermassen:

$$(B.) \quad \begin{cases} \int \varepsilon d\sigma = M, \\ F_i + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} = \text{Const.}, \end{cases} \quad (B'.) \quad \begin{cases} \int \varepsilon' d\sigma = M', \\ F_i + \int \frac{\varepsilon' d\sigma}{E_i} = \text{Const.}, \end{cases}$$

$$(B'') \quad \begin{cases} \int \varepsilon'' d\sigma = M'', \\ F_i + \int \frac{\varepsilon'' d\sigma}{E_i} = \text{Const.} \end{cases}$$

Sind nun ε und ε' die Dichtigkeiten der in den beiden ersten Fällen *wirklich* eintretenden Belegungen, so werden ε und ε' den Gleichungen (B.) und (B'.) Genüge leisten. Hieraus ergeben sich, falls man diese Gleichungen mit irgend welchen Constanten k und k' multiplicirt, und addirt, folgende weitere Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int (k\varepsilon + k'\varepsilon') d\sigma &= kM + k'M', \\ (k + k')F_i + \int \frac{(k\varepsilon + k'\varepsilon') d\sigma}{E_i} &= \text{Const.}; \end{aligned}$$

und diese Gleichungen gewinnen, falls man jene Constanten k , k' den beiden Relationen

$$\begin{aligned} kM + k'M' &= M'', \\ k + k' &= 1 \end{aligned}$$

unterwirft, die einfachere Gestalt:

$$\begin{aligned} \int (k\varepsilon + k'\varepsilon') d\sigma &= M'', \\ F_i + \int \frac{(k\varepsilon + k'\varepsilon') d\sigma}{E_i} &= \text{Const.} \end{aligned}$$

Folglich wird den Gleichungen (B'') Genüge geleistet, wenn man da-

selbst für ε'' den Werth nimmt: $k\varepsilon + k'\varepsilon'$. Und hieraus folgt, auf Grund des ersten Theorems, dass dieser Werth

$$\varepsilon'' = k\varepsilon + k'\varepsilon'$$

diejenige Belegung repräsentirt, welche im dritten Falle *wirklich* eintritt. Also der Satz:

Ein Satz der Superposition. — *Denkt man sich einen isolirten Conductor, auf welchen von Aussen her gegebene Kräfte einwirken, einmal mit der Ladung M , das zweite Mal mit der Ladung M' , das dritte Mal mit der Ladung M'' versehen, und die Dichtigkeiten der in diesen drei Fällen entstehenden elektrischen Belegungen mit ε , ε' und ε'' bezeichnet, so werden ε , ε' und ε'' mit einander verbunden sein durch eine Relation von folgender Gestalt:*

$$\varepsilon'' = k\varepsilon + k'\varepsilon'.$$

Und zwar bestimmen sich die hier auftretenden Constanten k und k' mittelst der beiden Gleichungen:

$$M'' = kM + k'M',$$

$$1 = k + k'.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich andere Sätze der Superposition, so z. B. folgender:

Ein zweiter Satz der Superposition. — *Es sei gegeben ein isolirter Conductor, auf den bestimmte gegebene äussere Kräfte, deren Potential F heissen mag, bald einwirken, bald nicht einwirken sollen.*

Bezeichnet alsdann ε die Dichtigkeit, mit welcher sich eine gegebene elektrische Ladung M ohne Einwirkung der Kräfte F auf dem Conductor ausbreitet, ferner ε' die Dichtigkeit derjenigen elektrischen Belegung, welche auf dem Conductor entsteht, wenn derselbe in seinem natürlichen Zustande der Einwirkung der Kräfte F ausgesetzt wird, — so wird

$$\varepsilon'' = \varepsilon + \varepsilon'$$

die Dichtigkeit derjenigen Belegung sein, welche eintritt, wenn der Conductor zuerst jene Ladung M erhalten hat, und sodann der Einwirkung der Kräfte F ausgesetzt wird.

§ 7.

Ueber die elektrische Vertheilung auf dem Ellipsoid.

Die Wirkung, welche eine von zwei ähnlichen Ellipsoidflächen O und O_1 begrenzte homogene materielle Schale auf Punkte i des inneren Hohlraumes ausübt, ist, nach einem bekannten Satze der analytischen

Mechanik*), gleich Null, mithin das betreffende Potential *constant*. Es sei O die *innere*, O_1 die *äussere* Fläche, und beide Flächen mögen einander unendlich nahe liegen. Ferner sei M die *Masse* der Schaafe, q ihre *constante Dichtigkeit*, und δ ihre *inconstante* (nämlich von Stelle zu Stelle variirende) *Dicke*. Alsdann ist offenbar:

$$(\alpha.) \quad q \int \delta do = M,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente do der Fläche O . Ueberdies wird, zufolge des anfangs genannten Satzes, das Potential der Schaafe auf alle Punkte i innerhalb O *constant* sein, also die Formel stattfinden:

$$(\beta.) \quad q \int \frac{\delta do}{E_i} = \text{Const.}$$

Dies vorangeschickt, wollen wir jetzt unsere Betrachtungsweise ändern, indem wir die Ellipsoidfläche O als die Oberfläche eines *isolirten metallischen Conductors* uns denken, dem von Hause aus die *elektrische Ladung* M zuertheilt worden ist, und auf den von Aussen her *keinerlei* Kräfte einwirken. Alsdann ergeben sich für die Dichtigkeit ε der auf diesem Conductor entstehenden elektrischen Belegung die bekannten Gleichungen:

$$(\gamma.) \quad \int \varepsilon do = M,$$

$$(\delta.) \quad \int \frac{\varepsilon do}{E_i} = \text{Const.}$$

Diesen Gleichungen $(\gamma.)$, $(\delta.)$ wird, wie ein Blick auf $(\alpha.)$, $(\beta.)$ zeigt, Genüge geleistet, wenn man für ε den Werth $q\delta$ substituirt. Und hieraus folgt, auf Grund des ersten Theorems pg. 211, dass dieser Werth

$$\varepsilon = q\delta$$

diejenige elektrische Belegung repräsentirt, welche auf dem betrachteten Conductor unter den gegebenen Umständen *in Wirklichkeit* eintreten wird. Wir gelangen somit, weil q *constant* ist, zu folgendem Resultate:

Satz. — *Bezeichnet O die Oberfläche eines isolirten und elektrisch geladenen ellipsoidischen Conductors, auf den von Aussen her keinerlei Kräfte einwirken, und denkt man sich überdies eine unendlich wenig grössere ähnliche Ellipsoidoberfläche O_1 construirt, so wird die auf O entstehende elektrische Belegung stets der Art beschaffen sein, dass ihre Dichtigkeit ε in jedem Punkte der Fläche O direct proportional ist mit dem senkrechten Abstände dieses Punktes von der Fläche O_1 .*

*) Vgl. z. B. *Duhamel's* vortreffliches Lehrbuch der analytischen Mechanik.

Dabei mag bemerkt sein, dass man diesem Satze mancherlei andere Gestalten zuertheilen kann. So z. B. kann man die in Rede stehende Dichtigkeit ε in irgend einem Punkte o der Fläche O auch so darstellen:

$$\varepsilon = \frac{M}{4\Delta}, \quad [C. Neumann, Pogg. Ann., Band 113, 1861],$$

wo M die Gesamtmasse der elektrischen Belegung, Δ aber den Flächeninhalt desjenigen *Diametralschnittes* des Conductors repräsentirt, der parallel läuft zur Tangentialebene im Punkte o . — Ferner kann man dieses ε auch so darstellen:

$$\varepsilon = \frac{M}{4\pi \sqrt{abc} \sqrt{RR'}}, \quad [Paolo Pagi, Nuovo Cim. 1876],$$

wo wiederum M die Gesamtmasse der elektrischen Belegung bezeichnet, a, b, c die Halbaxen der Conductoroberfläche repräsentiren, und R, R' die *Hauptkrümmungsradien* der Conductoroberfläche im Punkte o vorstellen.

Ist insbesondere die Conductoroberfläche O ein *Rotations-Ellipsoid*, so kann man die Dichtigkeit ε im Punkte o auch so ausdrücken:

$$\varepsilon = \frac{M}{4\pi a \sqrt{SS'}}, \quad [C. Neumann, Math. Ann., Bd. 3, p. 620];$$

wo a den Radius des Aequators, und S, S' die beiden *Brennstrahlen* des Punktes o vorstellen. Dabei sind, falls das Rotationsellipsoid ein *abgeplattetes* ist, unter den Brennstrahlen des Punktes o das Maximum und Minimum derjenigen Entfernungen zu verstehen, welche der Punkt o von der Peripherie des *Brennkreises* besitzt.

Endlich kann man [nach *C. Neumann*, Math. Ann., Bd. 18, pg. 228; 1881] jene elektrische Belegung, einerlei ob das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid oder ein ungleichaxiges ist, auch durch folgenden Satz charakterisiren:

Befindet sich die Elektricität auf der Oberfläche des Ellipsoids (ohne Einwirkung äusserer Kräfte) im Gleichgewicht, und construirt man irgend drei äquidistante und das Ellipsoid schneidende Parallelebenen E, F, G von ganz beliebiger Richtung, so wird die zwischen E und F vorhandene Elektricitätsmenge stets ebenso gross sein, wie diejenige, welche zwischen F und G sich vorfindet.

Ein anderer hierher gehöriger Satz wird in einem der weiter folgenden Paragraphen (auf pg. 225) exponirt werden.

§ 8.

Ueber die elektrische Vertheilung auf einem Conductor, dessen Oberfläche die Form einer sogenannten Gleichgewichtsoberfläche besitzt.

Es seien im Raume irgend welche Massen M in bestimmter Weise gegeben. Das Potential derselben in Bezug auf einen variablen Punkt (x, y, z) mag V heissen. Alsdann repräsentirt die Gleichung

$$(1.) \quad V = C$$

eine sogenannte *Gleichgewichtsoberfläche* [vgl. p. 8]. Dabei mag die Constante C so gewählt sein, dass alle Massen M innerhalb dieser Gleichgewichtsoberfläche liegen.

Bezeichnet man nun diese Gleichgewichtsoberfläche (1.) mit O , ihre äussere Normale mit n , und ihre einzelnen Elemente mit do , so gelten folgende Sätze:

Erster Satz. — *Denkt man sich die Fläche O der Art mit Masse belegt, dass die Flächendichtigkeit ε der Belegung den Werth hat:*

$$(2.) \quad \varepsilon = - \frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn},$$

so wird die Gesammtmasse dieser Belegung $= M$ sein, d. h. ebenso gross sein, wie der Gesammtbetrag jener das Potential V erzeugenden Massen.

Zweiter Satz. — *Ferner wird alsdann das Potential der genannten Belegung auf alle Punkte innerhalb O constant, und zwar $= C$ sein, wo C die in (1.) genannte Constante vorstellt.*

Dritter Satz. — *Endlich wird alsdann das Potential der Belegung in Bezug auf alle Punkte ausserhalb O identisch sein mit dem Potentiale V selber. Mit andern Worten: Die in Rede stehende Belegung wird für all' jene äusseren Punkte äquipotential sein mit den von Hause aus gegebenen Massen M .*

Beweis des ersten Satzes. — V ist das Potential der Massen M , und diese Massen M liegen innerhalb der Fläche O . Folglich ist [Satz (D.) pg. 202]:

$$\int \frac{dV}{dn} do = - 4\pi M.$$

Substituirt man aber hier für $\frac{dV}{dn}$ den aus (2.) entspringenden Werth, so folgt:

$$(3.) \quad \int \varepsilon do = M. \quad \text{—} \quad Q. \text{ e. d.}$$

Beweis des zweiten Satzes. — Wir führen, neben dem Potential V , noch ein zweites Potential ein:

$$(4.) \quad U = \frac{m}{E},$$

wo E den Abstand eines variablen Punktes (x, y, z) von der Masse m vorstellen soll. Dabei mag diese Masse m als ein *einzelner Massenpunkt* gedacht werden, der irgendwo *innerhalb* O , etwa an der Stelle (a, b, c) liegt. Alsdann wird auf diese Potentiale U und V ohne Weiteres der Satz (1. β.) pg. 202 anwendbar sein, wodurch sich ergibt:

$$(5.) \quad \iiint_{\text{über den Aussenraum von } O} (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = - \int (U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn}) do.$$

Nun liegen die Massen m, M *innerhalb* O , mithin sind ΔU und ΔV *ausserhalb* O überall $= 0$; so dass also die linke Seite der Formel *verschwindet*. Beachtet man überdies, dass V *auf* O [zufolge (1.)] *constant*, $= C$ ist, so ergibt sich:

$$\int U \frac{dV}{dn} do = \int C \frac{dU}{dn} do,$$

oder, falls man für U und $\frac{dV}{dn}$ die aus (4.) und (2.) entspringenden Werthe substituirt, und zugleich durch m dividirt:

$$- 4\pi \int \frac{\varepsilon do}{E} = C \int \frac{d \frac{1}{E}}{dn} do,$$

wo alsdann E den Abstand des Elementes do von jenem innern Punkte $m(a, b, c)$ vorstellt. Das Integral rechts ist $= - 4\pi$, zufolge des Satzes (E.) pg. 203. Somit ergibt sich:

$$(6.) \quad \int \frac{\varepsilon do}{E} = C. \quad \text{—} \quad Q. \text{ e. d.}$$

Beweis des dritten Satzes. — Wiederum mag neben dem Potential V noch das Potential

$$(7.) \quad U = \frac{m}{E}$$

eingeführt werden, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt die Masse m in irgend einem Punkte (a, b, c) *ausserhalb* O gedacht werden soll. Auch mag diese Masse m nicht als ein einzelner Massenpunkt, sondern vielmehr als eine *äusserst kleine homogene Kugel* von der Dichtigkeit q und vom Volumen ϖ angesehen werden, deren Centrum in (a, b, c) liegt; so dass also die Relation stattfindet:

$$(7a.) \quad m = q\varpi.$$

Alsdann sind U , $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$, ebenso wie V , $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, im Aussenraume der Fläche O überall *stetig* [vgl. pg. 15]; so dass also der Anwendung des Satzes (C β .) pg. 202 auf diese Potentiale U und V kein Hinderniss entgegen steht*). Auf Grund jenes Satzes ergibt sich die Formel:

$$(8.) \quad \iiint_{\text{über den Aussenraum von } O} (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = - \int (V \frac{dV}{dn} - U \frac{dU}{dn}) d\sigma,$$

d. i. die Formel:

$$(9.) \quad - \iiint_{\text{über den Aussenraum von } O} V \Delta U dx dy dz = - \int (U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn}) d\sigma,$$

denn ΔV ist offenbar im Aussenraume von O überall $= 0$.

Nun repräsentirt U das Potential der kleinen homogenen Kugel: $m = q\bar{\omega}$. Demgemäss ist ΔU , abgesehen vom Volumen $\bar{\omega}$, im Aussenraume von O überall $= 0$, innerhalb jenes Volumens $\bar{\omega}$ aber $= -4\pi q$ [vgl. (7.) p. 17]. Und demgemäss reducirt sich die linke Seite der Formel (9.) auf

$$4\pi q \iiint_{\bar{\omega}} V dx dy dz,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $dx dy dz$ des Volumens $\bar{\omega}$. Da dieses Volumen $\bar{\omega}$ ausserordentlich klein sein soll, so kann man V in Erstreckung von $\bar{\omega}$ als constant betrachten, also als gleich gross betrachten mit demjenigen Werthe $V(a, b, c)$, den V im *Centrum* (a, b, c) des Volumens $\bar{\omega}$ hat. Demgemäss ist die linke Seite der Formel (9.) auch so darstellbar:

$$4\pi q V(a, b, c) \iiint_{\bar{\omega}} dx dy dz.$$

Dieser Ausdruck aber ist, weil das hier auftretende Integral den Werth $\bar{\omega}$ hat, identisch mit:

$$4\pi q \bar{\omega} V(a, b, c),$$

also, nach (7a.), identisch mit

$$4\pi m V(a, b, c);$$

*) Ein solches Hinderniss würde vorhanden sein, wenn man die Masse m schlechtweg als einen einzelnen in (a, b, c) vorhandenen Massen-Punkt ansehen wollte. Denn alsdann würden U , $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ in diesem Punkte (a, b, c) , der zum Aussenraume der Fläche O gehört, *unendlich*, also *unstetig* sein. Folglich würde alsdann jener Satz (C β .) auf diesen Aussenraum *nicht* anwendbar sein.

so dass also die Formel (9.) folgende einfachere Gestalt gewinnt:

$$(10.) \quad 4\pi m V(a, b, c) = - \int \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) do.$$

Beachtet man nun, dass V auf O constant, $= C$ ist, und substituirt man überdies für $\frac{dV}{dn}$ und U die aus (2.) und (7.) entspringenden Werthe, und dividirt man endlich noch durch m , so geht die Formel (10.) über in:

$$(11.) \quad 4\pi V(a, b, c) = 4\pi \int \frac{\varepsilon do}{E} + C \int \frac{d \frac{1}{E}}{dn} do,$$

wo alsdann E den Abstand des Punktes (a, b, c) vom Elemente do vorstellt. Hier aber ist das *letzte* Integral $= 0$; zufolge des Satzes (E.) pg. 203. Somit folgt:

$$(12.) \quad V(a, b, c) = \int \frac{\varepsilon do}{E} = Q. e. d.$$

Weitere Betrachtungen. — Die *elektrostatische* Bedeutung der soeben bewiesenen Sätze liegt klar zu Tage. Zufolge der beiden ersten Sätze wird nämlich den beiden Gleichungen

$$(13.) \quad \begin{aligned} \int \varepsilon do &= M, \\ \int \frac{\varepsilon do}{E_i} &= \text{Const.} \end{aligned}$$

Genüge geleistet durch den Ausdruck:

$$(14.) \quad \varepsilon = - \frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn}.$$

Und hieraus folgt, auf Grund des ersten Theorems pg. 211, dass dieser Ausdruck (14.) diejenige elektrische Belegung repräsentirt, welche auf einem isolirten und von der Fläche O umgrenzten Conductor eintreten wird, sobald derselbe isolirt und mit der elektrischen Ladung M versehen ist.

Dieses Resultat lässt sich noch ein wenig verallgemeinern, mit Hülfe des Proportionalitätssatzes pg. 216. Giebt man nämlich dem genannten Conductor, statt der Ladung M , irgend welche andere Ladung M' , und bezeichnet man die Dichtigkeit der in diesem Falle eintretenden elektrischen Belegung mit ε' , so ist nach jenem Satze:

$$(15.) \quad \varepsilon' : \varepsilon = M' : M,$$

also mit Rücksicht auf (14.):

$$(16.) \quad \varepsilon' = \frac{M' \varepsilon}{M} = - \frac{M'}{4\pi M} \frac{dV}{dn}.$$

Demgemäss gelangt man zu folgendem Resultate:

Satz. — *Es sei V das von irgend welchen festen Massen M herührende Potential, mithin*

$$(A.) \quad V = C$$

eine der betreffenden Gleichgewichtsoberflächen. Und zwar sei die Constante C so gewählt, dass jene Massen M vollständig innerhalb dieser Gleichgewichtsoberfläche liegen.

Denkt man sich nun diese Gleichgewichtsoberfläche $V = C$ als die Oberfläche eines isolirten metallischen Conductors, dem von Hause aus die elektrische Ladung M' zuertheilt ist, und auf den von Aussen her keinerlei Kräfte einwirken, und bezeichnet man die elektrische Dichtigkeit der unter diesen Umständen auf dem Conductor entstehenden elektrischen Belegung mit ε' , so wird dieses ε' den Werth haben:

$$(B.) \quad \varepsilon' = - \frac{M'}{4\pi M} \frac{dV}{dn},$$

wo n die äussere Normale der Conductoroberfläche vorstellt.

Zusatz. — *Hieraus folgt, dass diese Dichtigkeit ε' geometrisch darstellbar ist. Bezeichnet nämlich C_1 eine von C nur unendlich wenig verschiedene Constante, und denkt man sich, ausser der Fläche $V = C$, auch noch die benachbarte Gleichgewichtsoberfläche $V = C_1$ construiert, und den (inconstanten) senkrechten Abstand dieser beiden Flächen von einander mit δ bezeichnet, so wird jene Dichtigkeit ε' umgekehrt proportional mit δ sein.*

Beweis des Zusatzes. — Um die Vorstellung zu fixiren, wollen wir uns die Constante C_1 , die unendlich wenig von C verschieden sein soll, so gewählt denken, dass die Fläche $V = C$ oder O von der Fläche $V = C_1$ oder O_1 umschlossen wird. Errichten wir nun auf O in irgend einem Punkte o die äussere Normale n , und bezeichnen wir den Punkt, in welchem O_1 von n getroffen wird, mit o_1 , so kann das Linien-element $\delta = (oo_1)$ angesehen werden als das erste Element dn der Normale n . Die Werthe, welche V in den beiden Endpunkten o und o_1 dieses Elementes besitzt, sind offenbar C und C_1 . Folglich hat der dem dn correspondirende Zuwachs von V den Werth:

$$dV = C_1 - C.$$

Demgemäss erhält man:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{C_1 - C}{(oo_1)} = \frac{C_1 - C}{\delta}.$$

Substituirt man aber diesen Werth von $\frac{dV}{dn}$ in der Formel (B.), so sieht man, dass ε' umgekehrt proportional ist mit δ . — *Q. e. d.*

Anwendung auf das Ellipsoid. — Wir haben früher [pg. 217] eine von zwei ähnlichen Ellipsoidflächen begrenzte homogene materielle Schaaale in Betracht gezogen, und erwähnt, dass die Wirkung dieser Schaaale auf Punkte ihres innern Hohlraumes stets $= 0$ ist. Andererseits lässt sich die Wirkung einer solchen Schaaale auf Punkte ihres Aussenraumes ziemlich leicht berechnen. Und hierbei gelangt man, namentlich in dem Falle, dass die Schaaale unendlich dünn ist, zu sehr einfachen und anschaulichen Resultaten. So z. B. findet man, dass in diesem Falle die Gleichgewichtsoberflächen (d. i. die Flächen constanten Potentials) lauter Ellipsoidflächen sind, und zwar Ellipsoidflächen, die mit der gegebenen unendlich dünnen Schaaale confocal sind*).

Ist umgekehrt ein beliebiges System confocaler Ellipsoidflächen gegeben, und bezeichnet man irgend eine bestimmte derselben mit Ω , ferner eine zu Ω ähnliche und von Ω nur unendlich wenig verschiedene Ellipsoidfläche mit Ω' , so werden alle ausserhalb Ω befindlichen Flächen des gegebenen confocalen Systems angesehen werden können als ein System von Gleichgewichtsoberflächen, bei denen die erzeugenden Massen repräsentirt sind durch eine von Ω und Ω' begrenzte homogene materielle Schaaale. Nimmt man also insbesondere für Ω die kleinste Fläche des gegebenen confocalen Systems, d. i. die sogenannte Focalellipse oder vielmehr die von dieser Focalellipse umgrenzte ebene Fläche, so gelangt man zu folgendem Satze:

Hülfsatz. — Ein System confocaler Ellipsoidflächen kann stets aufgefasst werden als ein System von Gleichgewichtsoberflächen, bei denen die erzeugenden Massen dargestellt sind durch eine gewisse materielle Belegung der von der Focalellipse begrenzten ebenen Fläche**).

Auf ein solches System confocaler Ellipsoidflächen ist daher der vorhin [pg. 224] gefundene Satz, sowie auch der dortige Zusatz ohne Weiteres anwendbar. In solcher Weise gelangt man zu folgendem Resultate:

Satz. — Bezeichnet O die Oberfläche eines isolirten und elektrisch geladenen ellipsoidischen Conductors, auf welchen von Aussen her keinerlei Kräfte einwirken, und denkt man sich überdies eine unendlich wenig grössere confocale Ellipsoidfläche O_1 construirt, so wird die auf O entstehende elektrische Vertheilung stets der Art beschaffen sein, dass ihre Dichtigkeit in jedem Punkte der Fläche O umgekehrt proportional ist mit dem senkrechten Abstände δ dieses Punktes von der Fläche O_1 .

*) Vgl. z. B. Duhamel's Lehrbuch der analytischen Mechanik.

**) Besteht das gegebene confocale System aus abgeplatteten Rotationsellipsoiden, so ist die Focalellipse ein Kreis. Besteht dasselbe aber aus gestreckten Rotationsellipsoiden, so wird jene Focalellipse eine begrenzte gerade Linie sein.

Dieser Satz bildet ein merkwürdiges Gegenstück zu dem früheren Satze pg. 218. Während dort *ähnliche* Ellipsoidflächen und *directe* Proportionalität auftreten, ist hier von *confocalen* Flächen und *umgekehrter* Proportionalität die Rede.

§ 9.

Ueber die elektrische Vertheilung auf einem schaaalenförmigen Conductor.

Es sei irgend ein isolirter *schaalenförmiger* Conductor gegeben, dessen *innere* und *äussere* Begrenzungsfläche respective Ω und O heissen mögen. Ferner seien in dem *Aussenraume* dieses Conductors (d. i. ausserhalb O) irgend welche *festen* elektrische Massen M^* vorhanden†). Es soll die Vertheilung untersucht werden, welche eine dem Conductor mitgetheilte Elektrizitätsmenge M unter dem Einflusse jener festen Massen M^* annehmen wird††).

Nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes wird das elektrische Gesammtpotential V für alle Punkte i des Conductors, d. i. für alle zwischen Ω und O liegenden Punkte *constant* sein. Demgemäss ergibt sich die Formel:

$$(1.) \quad V_i = \text{Const.} = G,$$

wo V_i theils von der Einwirkung jener festen Massen M^* , theils von den auf Ω und O vorhandenen noch unbekannten elektrischen Belegungen herrührt. Bezeichnet man die Dichtigkeiten dieser noch unbekannten Belegungen auf Ω und O respective mit η und ε , ferner den Werth des Potentials V für irgend einen Punkt α innerhalb Ω mit V_α , so ist bekanntlich [vgl. pg. 174]:

$$V_\alpha = \overline{V_i}, \\ + 4\pi\eta = \frac{d\overline{V_\alpha}}{d\nu}.$$

Dabei repräsentirt ν die *äussere* Normale der Fläche Ω , und η den im Fusspunkte derselben vorhandenen Werth der Dichtigkeit [vgl. die

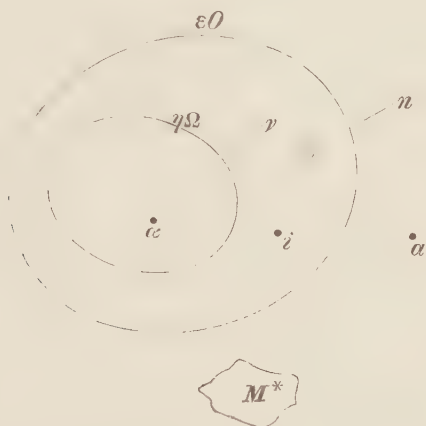
†) Man kann sich z. B. im Aussenraume des Conductors irgend welche durch Reiben elektrisch gemachte Isolatoren aufgestellt denken, und unter jenen *festen elektrischen Massen* M^* diejenigen Elektrizitäten verstehen, welche in diesen Isolatoren angehäuft sind.

††) Wir werden dabei die zum Conductor gehörigen, also *zwischen* Ω und O liegenden Punkte (ebenso wie früher) mit i bezeichnen; andererseits aber die *nicht* zum Conductor gehörigen theils mit α , theils mit a benennen. Und zwar sollen unter α diejenigen verstanden sein, welche *innerhalb* Ω liegen, und unter a diejenigen, welche *ausserhalb* O sich befinden. Vgl. die Figur.

folgende Figur]. Diese beiden Gleichungen sind, mit Rücksicht auf die Formel (1.), auch so darstellbar:

$$(2.) \quad \overline{V_\alpha} = \text{Const.} = G,$$

$$(3.) \quad + 4\pi\eta = \frac{d\overline{V_\alpha}}{dv}.$$



V_α repräsentirt ein Potential, dessen erzeugende Massen [M^* und (ε) , (η)] theils *ausserhalb* Ω , theils *auf* Ω liegen. Da nun dieses Potential, nach (2.), auf Ω *constant*, $= G$ ist, so wird dasselbe diesen nämlichen constanten Werth G auch besitzen im ganzen *Innenraume* von Ω ; wie sich solches aus dem dritten Satze pg. 206 sofort ergibt. Für alle Punkte α des Innenraumes von Ω wird also die Formel stattfinden:

$$(4.) \quad V_\alpha = \text{Const.} = G.$$

Solches constatirt, folgt aus (3.) sofort:

$$(5.) \quad \eta = 0;$$

so dass man also auf Grund der Formeln (5.) und (1.), (4.) zu folgendem Satze gelangt:

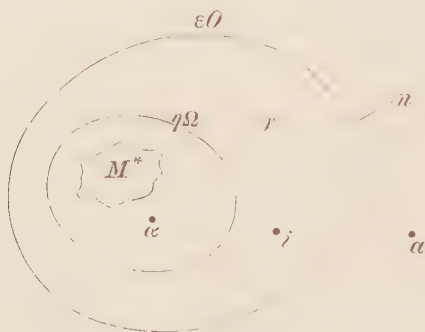
Erster Satz. — *Ist ein isolirter und elektrisch geladener schalenförmiger Conductor der Einwirkung irgend welcher elektrischer Massen M^* ausgesetzt, die im Aussenraume des Conductors aufgestellt sind, so wird nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes freie Elektrizität nur auf der äussern, nicht aber auf der innern Oberfläche des Conductors anzutreffen sein. Auch wird das elektrische Gesamtpotential im Conductor selbst und im innern Hohlraume desselben überall ein und denselben constanten Werth G haben. Es wird mithin die Wirkung auf Punkte im innern Hohlraume stets $= 0$ sein.*

Zusatz. — *Dieser Satz gilt [wie sich in genau derselben Weise ergibt] auch dann, wenn der Conductor zur Erde abgeleitet ist, nur mit dem Unterschiede, dass in diesem Falle die Constante G gleich Null ist.*

Wir gehen über zur Betrachtung des Falles, dass die einwirkenden Massen M^* nicht im Aussenraume des Conductors, sondern in seinem *innern Hohlraume* (d. i. innerhalb Ω) aufgestellt sind.

Wiederum wird, nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, das elektrische Gesamtpotential V für alle Punkte i zwischen Ω und O constant sein:

$$(1.) \quad V_i = \text{Const.} = G.$$



Beachtet man, dass dieses elektrische Gesamtpotential V theils von jenen Massen M^* , theils von den noch unbekannten auf O und Ω entstehenden elektrischen Belegungen herrührt, und bezeichnet man die Dichtigkeiten dieser Belegungen respective mit ε und η , so ergeben sich [vgl. pg. 174] die Formeln:

$$\begin{aligned} V_a &= V_i, \\ -4\pi\varepsilon &= \frac{dV_a}{dn}, \end{aligned}$$

d. i. Formeln, die man mit Rücksicht auf (1.) auch so schreiben kann:

$$(2.) \quad \bar{V}_a = \text{Const.} = G,$$

$$(3.) \quad -4\pi\varepsilon = \frac{d\bar{V}_a}{dn};$$

dabei bezeichnet n die äussere Normale von O , und ε die Dichtigkeit im Fusspunkte derselben.

Ist nun, wie wir fortan voraussetzen wollen, der Conductor zur Erde abgeleitet, so ist bekanntlich [vgl. den dritten Satz pg. 159] $G = 0$; so dass die Gleichungen (1.), (2.) übergehen in:

$$(4.) \quad V_i = 0,$$

$$(5.) \quad \overline{V_a} = 0.$$

V_a repräsentirt ein Potential, dessen erzeugende Massen $[(\epsilon), (\eta)$ und $M^*]$ theils *auf*, theils *innerhalb* O liegen. Da nun dieses Potential, nach (5.), auf O überall $= 0$ ist, so wird dasselbe auch *ausserhalb* O überall $= 0$ sein; wie solches aus dem fünften Satze pg. 207 sich sofort ergibt. Für alle Punkte a des Aussenraumes von O wird also die Formel stattfinden:

$$(6.) \quad V_a = 0.$$

Solches constatirt, folgt aus (3.) sofort:

$$(7.) \quad \epsilon = 0;$$

so dass man also zu folgendem Resultate gelangt:

Zweiter Satz. — *Ist ein zur Erde abgeleiteter schaaalenförmiger Conductor der Einwirkung irgend welcher elektrischer Massen M^* ausgesetzt, die im innern Hohlraume des Conductors aufgestellt sind, so wird nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes freie Elektricität nur auf der innern, nicht aber auf der äussern Oberfläche des Conductors anzutreffen sein. Auch wird das elektrische Gesammpotential im Conductor selbst und in seinem Aussenraume allenthalben $= 0$ sein. Folglich wird die Wirkung auf irgend einen Punkt im Aussenraume ebenfalls $= 0$ sein.*

Ueberdies ist zu bemerken, dass die Gesamtmasse der an der innern Oberfläche entstehenden elektrischen Belegung stets $= -M^*$ sein wird.

Um den letzten Theil dieses Satzes zu beweisen, construirt man irgend eine den Conductor umschliessende Kugelfläche S , vom Radius R , und bezeichne die einzelnen Elemente derselben mit ds . Bezeichnet man alsdann das elektrische Gesammpotential (nach wie vor) mit V , so wird der Ausdruck

$$- \frac{1}{4\pi} \int \frac{dV}{dR} ds$$

gleich sein der Summe all' derjenigen Massen, von denen das Potential V herrührt; wie solches aus dem Satze (D.) pg. 202 ohne Weiteres sich ergibt. Diese Massen sind theils durch M^* , theils durch (η) , theils durch (ϵ) dargestellt; so dass also die in Rede stehende Gleichung folgendermassen lautet:

$$M^* + \int \epsilon d\sigma + \int \eta d\omega = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{dV}{dR} ds.$$

Beachtet man nun, dass die Kugelfläche S mit all' ihren Elementen ds dem Aussenraume des Conductors angehört, und dass in diesem Aussen-

raume das Potential V überall $= 0$ ist [vgl. (6.)], so ergibt sich sofort, dass das Integral *rechter Hand verschwindet*. Ueberdies ist $\varepsilon = 0$, zufolge (7.). Demgemäss erhält man:

$$M^* + \int \eta d\omega = 0. \quad - \quad Q. e. d.$$

Aufgabe. — Wir wollen uns endlich die Aufgabe stellen, diejenigen elektrischen Belegungen (η) und (ε) zu untersuchen, welche auf dem betrachteten schalenförmigen Conductor entstehen werden, wenn derselbe *isolirt* und mit einer *gegebenen Elektrizitätsmenge* M geladen ist, und wenn derselbe überdies der Einwirkung jener festen elektrischen Massen M^* ausgesetzt ist, die im *innern Hohlraume* des Conductors von uns supponirt worden sind, und deren Potential F^* heissen mag.

Die aus dem dritten Theorem pg. 214 für die Dichtigkeiten η und ε jener Belegungen entspringenden Gleichungen

$$(1.) \quad \begin{cases} \int \eta d\omega + \int \varepsilon d\sigma = M, \\ F_i^* + \int \frac{\eta d\omega}{E_i} + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} = \text{Const.} \end{cases}$$

können dadurch erfüllt werden, dass man η und ε folgenden *gesonderten Bedingungen* unterwirft:

$$(2.) \quad \begin{cases} \int \eta d\omega = -M^*, \\ F_i^* + \int \frac{\eta d\omega}{E_i} = 0, \end{cases} \quad (3.) \quad \begin{cases} \int \varepsilon d\sigma = M + M^*, \\ \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} = \text{Const.}; \end{cases}$$

und diese gesonderten Bedingungen (2.) und (3.) sind einer genaueren Inspection zu unterziehen.

Die Gleichungen (2.) haben, für sich allein betrachtet, eine einfache physikalische Bedeutung mit Bezug auf einen gewissen *fingirten Fall*. Denkt man sich nämlich den Conductor für den Augenblick nicht isolirt, sondern *zur Erde abgeleitet*, so entsteht, zufolge des vorhergehenden Satzes, auf der äusseren Oberfläche O *gar keine* elektrische Belegung, und auf der innern Oberfläche Ω eine Belegung, deren Dichtigkeit η den Gleichungen (2.) Genüge leistet.

Andererseits sind die Gleichungen (3.) ebenfalls von einfacher physikalischer Bedeutung mit Bezug auf einen gewissen *andern fingirten Fall*. Denkt man sich nämlich die gegebene Fläche O als die Oberfläche eines *massiven*†) Conductors, der *isolirt*, mit der Elektrizitätsmenge $(M + M^*)$ geladen, und *keinerlei* äusseren Einwirkungen ausgesetzt ist, so wird auf der Oberfläche O dieses Conductors eine

†) Ein Conductor mag *massiv* heissen, sobald derselbe keinen inneren Hohlraum besitzt.

elektrische Belegung eintreten, deren Dichtigkeit ε den Gleichungen (3.) Genüge leistet.

Demgemäss sind also die in diesen beiden *fingirten Fällen* entstehenden Dichtigkeiten η und ε von solcher Beschaffenheit, dass sie den Gleichungen (2.), (3.), mithin auch den Gleichungen (1.) Genüge leisten. Aus dem Erfülltsein der Gleichungen (1.) folgt aber, mittelst des dritten Theorems pg. 214, sofort, dass η und ε diejenigen Dichtigkeiten vorstellen, welche in dem *eigentlich gegebenen Falle* wirklich eintreten werden: so dass wir also, unter Rücksichtnahme auf die in (2.), (3.) notirten Relationen

$$\int \eta d\omega = -M^*, \quad \int \varepsilon d\sigma = M + M^*,$$

zu folgendem Satze gelangen:

Dritter Satz. — *Wird ein isolirter und mit der elektrischen Ladung M versahener schalenförmiger Conductor der Einwirkung irgend welcher festen elektrischen Massen M^* ausgesetzt, und nimmt man an, dass all diese Massen M^* im innern Hohlraume des Conductors enthalten sind, so werden auf der innern und äussern Conductoroberfläche elektrische Belegungen entstehen, deren Massen respective $= -M^*$ und $= M + M^*$ sind.*

Auch wird die Belegung der innern Fläche genau dieselbe sein, als wäre der Conductor nicht isolirt, sondern zur Erde abgeleitet.

Andererseits wird die Belegung der äussern Fläche von genau derselben Beschaffenheit sein, als wäre diese Fläche die Oberfläche eines isolirten und mit der Elektrizitätsmenge $M + M^$ geladenen massiven Conductors, auf den von Aussen her keinerlei Kräfte einwirken.*

Das Problem der elektrischen Vertheilung auf einem *schalenförmigen* Conductor wird durch diesen Satz, wenigstens in dem Falle, dass die einwirkenden Kräfte ihren Sitz im innern Hohlraume des Conductors haben, auf zwei andere Probleme reducirt, deren jedes nur je *eine* Oberfläche betrifft.

§ 10.

Zwei sehr allgemeine Sätze über die Substitution neuer Massen an Stelle ursprünglich gegebener Massen.

An Stelle einer gegebenen homogenen materiellen Kugelschaale kann bekanntlich ein einzelner Massenpunkt im Centrum der Schaale *substituirt* werden, ohne dass dadurch die Wirkung auf äussere Punkte irgend welche Aenderung erleidet. Aehnliche aber bei Weitem allgemeinere Sätze über die *Substitution* von Massen ergeben sich aus der Theorie der Elektrostatik.

Um näher hierauf einzugehen, wollen wir uns einen *zur Erde abgeleiteten* metallischen Conductor denken, auf den von Aussen her *feste elektrische Massen* M^* einwirken. Alsdann erhalten wir [vgl. pg. 211] für die Dichtigkeit ε der auf der Conductoroberfläche O entstehenden elektrischen Belegung die Formel:

$$F_i^* + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} = 0,$$

wo i jeden beliebigen Punkt innerhalb O , und F_i^* das von jenen Massen M^* auf i ausgeübte Potential bezeichnet.

Diese Formel aber können wir auch so schreiben:

$$F_i^* = \int \frac{(\varepsilon) d\sigma}{E_i};$$

und demgemäss erkennen wir, dass die Massen M^* für alle Punkte i innerhalb O *äquipotential* sind mit einer auf O ausgebreiteten Massenbelegung von der Dichtigkeit $-\varepsilon$. Also der Satz:

Erster Satz. — *Sind ausserhalb einer geschlossenen Fläche O irgend welche Massen M^* in bestimmter Weise gegeben, so wird sich die Fläche O stets in solcher Art mit Masse belegen lassen, dass diese Belegung, für alle innerhalb O befindlichen Punkte, mit jenen Massen M^* äquipotential ist.*

Mit andern Worten: An Stelle der Massen M^ kann, unbeschadet der Wirkung auf Punkte innerhalb O , eine gewisse materielle Belegung der Fläche O substituirt werden.*

Wir gehen über zu einer analogen, in gewissem Sinne *umgekehrten* Betrachtung, indem wir jetzt Massen M^* betrachten wollen, die nicht ausserhalb, sondern *innerhalb* einer gegebenen geschlossenen Fläche sich befinden.

Es sei gegeben ein *zur Erde abgeleiteter, schalenförmiger Conductor*, mit der *innern* Begrenzungsfläche Ω und der *äussern* Begrenzungsfläche O . Und auf diesen Conductor mögen *feste elektrische Massen* M^* einwirken, die innerhalb Ω , d. i. im innern Hohlraume gelegen sind. Alsdann ergibt sich für die Dichtigkeiten η und ε der auf Ω und O entstehenden elektrischen Belegungen folgende Formel [vgl. pg. 215]:

$$V_i = F_i^* + \int \frac{\eta d\omega}{E_i} + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_i} = 0,$$

wo i jeden beliebigen Punkt zwischen Ω und O , und F_i^* das von jenen Massen M^* auf i ausgeübte Potential bezeichnet. Dabei soll das hinzugefügte V_i nur als Abbreviatur dienen zur Bezeichnung der linken Seite der Formel; so dass also dieses V_i das auf den Punkt i ausgeübte *elektrische Gesammpotential* repräsentirt.

Gleichzeitig wird, falls man unter a irgend einen Punkt im *Aussenraume* des Conductors, d. i. irgend einen ausserhalb O gelegenen Punkt versteht†), das auf einen solchen Punkt a ausgeübte elektrische Gesammpotential V_a den Werth haben:

$$V_a = F_a^* + \int \frac{\eta d\omega}{E_a} + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E_a}.$$

Nun ist auf Grund des letzten Paragraphs, nämlich auf Grund des zweiten Satzes pg. 229, zweierlei zu bemerken: *erstens*, dass ε durchweg $= 0$ ist, und *zweitens*, dass V_a ebenfalls $= 0$ ist. Demgemäss ergibt sich aus den vorstehenden beiden Formeln sofort:

$$F_i^* + \int \frac{\eta d\omega}{E_i} = 0,$$

$$F_a^* + \int \frac{\eta d\omega}{E_a} = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$F_i^* = - \int \frac{\eta d\omega}{E_i},$$

$$F_a^* = - \int \frac{\eta d\omega}{E_a}.$$

Diese beiden Formeln sagen aus, dass die Massen M^* in Bezug auf sämtliche Punkte i, a *äquipotential* sind mit einer auf Ω ausgebreiteten Massenbelegung von der Dichtigkeit $-\eta$, und führen daher zu folgendem Satze:

Zweiter Satz. — *Sind innerhalb einer geschlossenen Fläche Ω irgend welche Massen M^* in bestimmter Weise gegeben, so wird sich die Fläche Ω stets in solcher Art mit Masse belegen lassen, dass diese Belegung, für alle ausserhalb Ω befindlichen Punkte, mit jenen Massen M^* äquipotential ist.*

Mit andern Worten: An Stelle der Massen M^ kann, unbeschadet der Wirkung auf Punkte ausserhalb Ω , eine gewisse materielle Belegung der Fläche Ω substituirt werden.*

†) Vgl. die zweite Note auf pg. 226.

Zehntes Capitel.

Die charakteristische Function für die Aufgaben der elektrischen Vertheilung und für die Aufgaben des stationären Temperaturzustandes.

Im gegenwärtigen Capitel wird gezeigt werden, dass die Probleme der elektrischen Vertheilung in einem gegebenen Conductor zurückführbar sind auf die Ermittlung einer gewissen diesen Problemen eigenthümlich zugehörigen Function U , — wie solches bereits von *Green* in seiner berühmten Abhandlung vom Jahre 1828: „*An Essay on the Application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*“ ausgeführt worden ist*). Sodann soll gezeigt werden, dass diese Function U , welche kurzweg die *charakteristische Function* der betreffenden Probleme genannt werden mag, von gleicher Wichtigkeit auch ist für gewisse Aufgaben des *stationären Temperaturzustandes in einem homogenen Körper*.

In äusserlicher Beziehung sei noch Folgendes bemerkt: Die elektrisch geladenen Isolatoren, überhaupt die festen elektrischen Massen, unter deren Einwirkung das elektrische Gleichgewicht in einem gegebenen Conductor zu Stande kommt, werden von uns kurzweg die *inducirenden Ursachen*, und die von denselben herrührenden Kräfte die *inducirenden Kräfte* genannt werden. Und demgemäss werden wir z. B. die elektrische Belegung, welche auf der Oberfläche des Conductors unter der Einwirkung eines gegebenen elektrischen Massenpunktes m entsteht, als die *durch diesen Punkt inducirte Belegung* bezeichnen. Der Buchstabe V wird im gegenwärtigen Capitel nicht mehr für das elektrische Gesamtpotential, sondern in anderer Bedeutung gebraucht werden.

*) Jene *Green'sche* Abhandlung befindet sich in *The mathematical Papers of G. Green. London. 1871*; auch im *Crelle'schen Journal*, Bd. 47.

§ 1.

Ueber die elektrische Vertheilung auf der Oberfläche eines gegebenen Conductors.

Ein isolirter und elektrisch geladener Conductor sei der Einwirkung äusserer Kräfte exponirt, deren Potential F gegeben ist. Wir stellen uns die Aufgabe, die Dichtigkeit η der unter diesen Umständen auf der Conductoroberfläche entstehenden elektrischen Belegung näher zu bestimmen. Und zwar werden wir diese Aufgabe einem gewissen *allgemeinen Problem* subordiniren, und sodann dieses letztere auf ein *einfacheres Problem*, nämlich auf die Ermittlung der *charakteristischen Function* U reduciren.

Versteht man unter i jeden beliebigen Punkt *innerhalb* des Conductors, so gilt für die unbekannte Dichtigkeit η [nach dem ersten Theorem, pg. 211] folgende Formel:

$$F_i + \int \frac{\eta d\omega}{E_i} = \text{Const.};$$

eine Formel, die man auch so schreiben kann:

$$F_i + V_i = \text{Const.},$$

oder auch so:

$$(\alpha.) \quad V_i = (\text{Const.}) - F_i,$$

wo alsdann V_i das von jener unbekannten Belegung (η) auf den Punkt i ausgeübte Potential vorstellt.

Bezeichnet man ferner das Potential der nämlichen Belegung auf Punkte a *ausserhalb* des Conductors mit V_a , so gelten [vgl. (12.) pg. 173 und (11.) pg. 171] die Relationen:

$$(\beta.) \quad \overline{V_a} = \overline{V_i},$$

$$(\gamma.) \quad -4\pi\eta = \frac{d\overline{V_a}}{dv} - \frac{d\overline{V_i}}{dv},$$

wo v die äussere Normale der Conductoroberfläche vorstellt.

Da F gegeben ist, so kann man aus ($\alpha.$) die Werthe von V_i erhalten, bis auf eine additive Constante; und sodann aus ($\beta.$) die *Oberflächenwerthe* von V_a erhalten. Sollte es nun in irgend welcher Weise gelingen, auf Grund dieser Oberflächenwerthe von V_a , auch die *übrigen* Werthe von V_a zu finden, so würde man alsdann, mittelst der Formel ($\gamma.$), die gesuchte Dichtigkeit η sofort anzugeben im Stande sein. Von hier aus betrachtet, werden wir also zu sagen haben, dass der eigentliche Kern der Aufgabe in der Berechnung des Potentials V_a bestehe, dass mithin die Aufgabe reducirt werden könne auf folgendes

Allgemeines Problem: Auf der Oberfläche Ω des Conductors ist eine unbekannte elektrische Belegung ausgebreitet. Die Dichtigkeit derselben ist mit η , und ihr Potential auf äussere Punkte mit V_a bezeichnet.

Dieses Potential V_a ist in bestimmter Weise gegeben für diejenigen Punkte a , welche unmittelbar auf Ω liegen. Es handelt sich darum, dasselbe zu ermitteln für sämtliche Punkte a des ganzen Aussenraumes von Ω .

Bemerkung. Dieses Problem kann nur eine Lösung besitzen. Gesetzt nämlich, es existirten zwei Lösungen: V_a und V'_a , so würde die Differenz

$$W_a = V_a - V'_a$$

ebenfalls das Potential einer auf Ω ausgebreiteten Belegung sein, und zugleich die Eigenschaft besitzen, auf Ω überall zu verschwinden. Demgemäss würde der allgemeine Satz (§.) pg. 207 auf dieses Potential W ohne Weiteres anwendbar sein, und die Formel liefern:

$$\iiint_{\text{über den Aussenraum von } \Omega} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = 0.$$

Hieraus aber würde folgen, dass W im Aussenraume von Ω constant ist; und dieser constante Werth könnte, weil W auf Ω verschwindet, kein anderer als die Null sein. Somit würde sich also ergeben, dass die Differenz

$$W_a = V_a - V'_a$$

für jedweden Punkt a jenes Aussenraumes gleich Null ist. — Q. e. d.

Um das in Rede stehende allgemeine Problem in Angriff zu nehmen, wollen wir — als Mittel zum Zweck — zuvörderst ein etwas einfacheres Problem in Betracht ziehen, nämlich diejenige elektrische Belegung ins Auge fassen, welche auf dem gegebenen Conductor entstehen würde, falls derselbe zur Erde abgeleitet wäre, und falls auf ihn von Aussen her ein elektrischer Massenpunkt $m(a, b, c)$ einwirkte. Für die Dichtigkeit ε dieser Belegung ergiebt sich [vgl. das zweite Theorem pg. 211] die Formel:

$$(1.) \quad \frac{m}{R_i} + \int \frac{\varepsilon d\omega}{E_i} = 0,$$

wo i wiederum jeden beliebigen Punkt innerhalb des Conductors vorstellt, und wo R_i und E_i die Abstände dieses Punktes i von $m(a, b, c)$ und von $\varepsilon d\omega$ andeuten. Bezeichnet man das Potential des Punktes m mit $U^{(m)}$, ferner das Potential der Belegung (ε) mit $U^{(\varepsilon)}$:

$$U^{(m)} = \frac{m}{R}, \quad U^{(\varepsilon)} = \int \frac{\varepsilon d\omega}{E},$$

und die Summe dieser beiden Potentiale mit U :

$$U = U^{(m)} + U^{(\varepsilon)},$$

so kann man die Formel (1.) auch so schreiben:

$$(2.) \quad U_i = U_i^{(m)} + U_i^{(\varepsilon)} = 0.$$

Dabei sind in Betreff des *Gesammpotentials* U zwei Relationen anzuführen, die unmittelbar aus früher gefundenen Sätzen sich ergeben. Die *eine* derselben lautet [vgl. (18.) pg. 174]:

$$\overline{U_a} = \overline{U_i},$$

also mit Rücksicht auf (2.):

$$(3.) \quad U_a = 0;$$

während die *andere* [vgl. (19.) pg. 174] folgendermassen lautet:

$$(4.) \quad \frac{dU_a}{d\nu} = -4\pi\varepsilon,$$

wo ν die äussere Normale von Ω vorstellt.

Solches vorangeschickt, gehen wir über zum eigentlichen Kern unserer Betrachtung, nämlich zur Darlegung des *gegenseitigen Zusammenhanges der beiden Probleme*, d. i. zur Darlegung derjenigen Beziehung, die zwischen den beiden Potentialen V und U stattfindet.

Dabei wollen wir [ähnlich wie in einem früheren Falle, pg. 221] die Masse $m(a, b, c)$ nicht als einen einzelnen Massenpunkt, sondern als eine *ausserordentlich kleine homogene Kugel* von der Dichtigkeit q , vom Volumen ω und mit dem Centrum (a, b, c) uns vorstellen. Als dann wird das von den beiden Massen m und (ε) herrührende Potential U von solcher Beschaffenheit sein, dass

$$U_a, \quad \frac{\partial U_a}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_a}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_a}{\partial z}$$

im Aussenraume von Ω überall stetig sind. Gleiches gilt offenbar auch von

$$V_a, \quad \frac{\partial V_a}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_a}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_a}{\partial z};$$

denn V repräsentirt das Potential einer auf Ω ausgebreiteten Belegung (η). Demgemäss subordiniren sich U_a und V_a der allgemeinen Formel (C β .) pg. 202:

$$(5.) \quad \iiint_{\text{über den Aussenraum von } \Omega} (U\Delta V - V\Delta U) dx dy dz = - \int \left(U_a \frac{dV_a}{d\nu} - V_a \frac{dU_a}{d\nu} \right) d\omega.$$

Dabei ist, der Kürze willen, auf der linken Seite der Index a fortgelassen; wodurch offenbar kein Missverständniss entstehen kann. Unter ν ist wiederum [ebenso wie in (4.)] die *äussere* Normale von Ω zu verstehen.



Diese Formel (5.) ist, mit Rücksicht auf den zwischen U , $U^{(m)}$, $U^{(\varepsilon)}$ stattfindenden Zusammenhang:

$$U = U^{(m)} + U^{(\varepsilon)},$$

und mit Rücksicht darauf, dass U [vgl. (3.)] auf der Fläche Ω verschwindet, auch so darstellbar:

$$(6.) \quad \iiint_{\text{über den Aussenraum von } \Omega} (U \Delta V - V \Delta U^{(m)} - V \Delta U^{(\varepsilon)}) dx dy dz = \int V_a \frac{dU_a}{dv} d\omega,$$

und kann daher, weil die von den Belegungen (ε) und (η) herrührenden Potentiale $U^{(\varepsilon)}$ und V im Aussenraume von Ω den Gleichungen $\Delta U^{(\varepsilon)} = 0$ und $\Delta V = 0$ entsprechen, auch so geschrieben werden:

$$(7.) \quad - \iiint_{\text{über den Aussenraum von } \Omega} V \Delta U^{(m)} dx dy dz = \int V_a \frac{dU_a}{dv} d\omega.$$

Der hier auf der *linken Seite* stehende Ausdruck ist, weil das Volumen $\bar{\omega}$ der Kugel $m(a, b, c)$ ausserordentlich klein sein soll, successive in folgende Gestalten versetzbar [vgl. die völlig identischen Betrachtungen auf pg. 222]:

$$\begin{aligned} 4\pi q \iiint_{\bar{\omega}} V dx dy dz &= 4\pi q V(a, b, c) \iiint_{\bar{\omega}} dx dy dz \\ &= 4\pi q \bar{\omega} V(a, b, c) = 4\pi m V(a, b, c); \end{aligned}$$

so dass also die Formel (7.) übergeht in:

$$(8.) \quad 4\pi m V(a, b, c) = \int V_a \frac{dU_a}{dv} d\omega.$$

Hieraus folgt, falls man, was ohne Zweideutigkeit geschehen darf, bei V_a den Index a unterdrückt*):

$$(9.) \quad V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi m} \int V \frac{dU}{dv} d\omega,$$

*) Es ist bekanntlich [vgl. (12.) pg. 173]:

$$\bar{U}_a = \bar{U}_i, \quad \text{und} \quad \bar{V}_a = \bar{V}_i.$$

Demgemäss ist es einerlei, ob man an der Oberfläche von V_a oder von V_i spricht. Hingegen ist [vgl. (11.) pg. 171]:

$$\frac{dU_a}{dv} - \frac{d\bar{U}_i}{dv} = -4\pi\varepsilon, \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{V}_a}{dv} - \frac{d\bar{V}_i}{dv} = -4\pi\eta.$$

Demgemäss ist z. B. bei $\frac{dU}{dv}$ der Index a oder i durchaus erforderlich, und, ohne Missverständniss, *nicht* unterdrückbar.

Diese Formel repräsentirt den hier aufzudeckenden gegenseitigen Zusammenhang zwischen V und U . Sie ist übrigens mit Rücksicht auf die Relation (4.) auch so darstellbar:

$$(10.) \quad V(a, b, c) = -\frac{1}{m} \int V \varepsilon d\omega;$$

so dass man also, Alles zusammengefasst, zu folgendem Resultate gelangt:

Reduction des allgemeinen Problems auf die Ermittlung der charakteristischen Function U . — Soll das allgemeine Problem (pg. 236) gelöst werden, so denke man sich den gegebenen Conductor zur Erde abgeleitet, und bezeichne die Dichtigkeit derjenigen elektrischen Belegung, welche unter diesen Umständen durch irgend einen äussern elektrischen Massenpunkt $m(a, b, c)$ auf der Conductoroberfläche Ω inducirt werden würde, mit ε . Alsdann wird das in jenem allgemeinen Problem gesuchte Potential V im Punkte (a, b, c) den Werth besitzen:

$$(11.) \quad V(a, b, c) = -\frac{1}{m} \int V \varepsilon d\omega.$$

Durch dieses Integral, in welchem, abgesehen von den gegebenen Oberflächenwerthen des Potentials V , nur noch ε enthalten ist, wird die Lösung jenes allgemeinen Problems reducirt auf die Ermittlung von ε .

Setzt man übrigens

$$(12.) \quad U = U^{(m)} + U^{(\varepsilon)},$$

wo $U^{(m)}$ und $U^{(\varepsilon)}$ diejenigen Potentiale sein sollen, welche vom Massenpunkte $m(a, b, c)$ und von der Belegung (ε) auf einen variablen Punkt (x, y, z) ausgeübt werden, so kann man die Formel (11.) auch so schreiben:

$$(13.) \quad V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi m} \int V \frac{dU_a}{dv} d\omega,$$

wo v die äussere Normale von Ω vorstellt.

Demgemäss kann man von jenem allgemeinen Problem (pg. 236) nach Belieben sagen: dasselbe sei reducirt auf die Ermittlung von ε , oder auch: es sei reducirt auf die Ermittlung von U_a .

Diese Function U_a , welche nur von geometrischen Verhältnissen abhängt, welche nämlich vollständig bestimmt ist, sobald die Oberfläche Ω , und daneben noch die Lage des Massenpunktes $m(a, b, c)$ gegeben sind, mag kurzweg die charakteristische Function des in Rede stehenden Problems genannt werden; wobei allerdings einzuräumen ist, dass $U_a^{(\varepsilon)}$ und ε selber auf einen solchen Namen gleiches Anrecht haben würden. Die Einführung dieser Functionen U_a , $U_a^{(\varepsilon)}$, ε rührt von Green her. [Vgl. die auf pg. 234 citirte Green'sche Abhandlung.]

§ 2.

Anwendung der dargelegten Theorie auf die Kugel.

Die Dichtigkeit ε der auf einem zur Erde abgeleiteten Conductor durch einen äussern elektrischen Massenpunkt $m(a, b, c)$ inducirten Belegung ist für den Fall, dass der Conductor eine *Kugel* ist, ohne Weiteres angebbar auf Grund unserer früheren Untersuchungen. Für diesen Fall hat nämlich ε den Werth [vgl. (29.) pg. 186]:

$$(14.) \quad \varepsilon = - \frac{m(r^2 - A^2)}{4\pi A} \left(\frac{1}{R}\right)^3.$$

Dabei bezeichnet R den Abstand derjenigen Stelle, auf welche ε sich bezieht, vom Punkte m , während r den Centralabstand des Punktes m , und A den Kugelradius vorstellen. Auch haben wir damals [in (28.) pg. 185] gefunden, dass die Gesamtmasse M der Belegung (ε) den Werth hat:

$$(15.) \quad M = - \frac{mA}{r}.$$

Auf die Formel (14.) gestützt, können wir dem Satze (11.), speciell für die *Kugel*, folgende Gestalt geben:

Satz. — *Ist V das Potential irgend einer unbekannten auf der Kugel ausgebreiteten Massenbelegung, und sind die Oberflächenwerthe von V gegeben, so kann der Werth von V in irgend einem äussern Punkte (a, b, c) sofort berechnet werden mittelst der Formel:*

$$(16.) \quad V(a, b, c) = \frac{r^2 - A^2}{4\pi A} \int \frac{V d\omega}{R^3}.$$

Dabei bezeichnet R die Entfernungen der einzelnen Oberflächenelemente $d\omega$ vom Punkte (a, b, c) , ferner r den Centralabstand dieses Punktes (a, b, c) , und A den Kugelradius.

§ 3.

Beiläufige Bemerkungen.

Bezeichnet man diejenige Belegung, deren Dichtigkeit $= -\varepsilon$ ist, kurzweg mit $(-\varepsilon)$, und das von derselben ausgeübte Potential mit $U^{(-\varepsilon)}$, so kann man die Formel (2.)

$$U_i^{(m)} + U_i^{(\varepsilon)} = 0,$$

offenbar auch so schreiben:

$$U_i^{(m)} - U_i^{(-\varepsilon)} = 0,$$

oder auch so:

$$U_i^{(-\varepsilon)} = U_i^{(m)}.$$

D. h. die Belegung ($-\epsilon$) und der Punkt m sind unter einander äquipotential mit Bezug auf sämtliche Punkte i . Demgemäss gelangt man z. B., was speciell die Kugel betrifft, auf Grund der Formel (14.), und indem man E für $-\epsilon$ schreibt, zu folgendem

Satz. — Ausserhalb der Kugel sei ein Massenpunkt m gegeben, und auf der Kugeloberfläche sei eine materielle Belegung ausgebreitet, deren Dichtigkeit E der Formel entspricht:

$$(17.) \quad E = \frac{m(r^2 - A^2)}{4\pi A} \left(\frac{1}{R}\right)^3,$$

wo R die Entfernung desjenigen Kugelflächenpunktes, auf welchen E Bezug hat, vom Punkte m bezeichnet, während r den Centralabstand dieses Punktes m , und A den Kugelradius vorstellen sollen.

Alsdann wird diese Belegung (E) mit dem Massenpunkte m äquipotential sein in Bezug auf sämtliche Punkte i innerhalb der Kugelfläche.

Dieser Satz ist leicht auf die Ebene, d. i. auf den Fall $A = \infty$ übertragbar. — Um die Vorstellung zu fixiren, sei u der tiefste, o der höchste Punkt der gegebenen Kugelfläche, und der Massenpunkt m vertical über o gelegen [vgl. die Figur]. Alsdann ist offenbar $(r^2 - A^2)$ identisch mit dem Quadrat der von m aus an die Kugel gelegten Tangente, folglich

$$r^2 - A^2 = (mo)(mu),$$

oder, falls man $(mo) = \sigma$ setzt:

$$r^2 - A^2 = \sigma(\sigma + 2A);$$

so dass die Formel (17.) übergeht in:

$$(18.) \quad E = \frac{m\sigma}{2\pi} \left(\frac{\sigma}{2A} + 1\right) \left(\frac{1}{R}\right)^3.$$

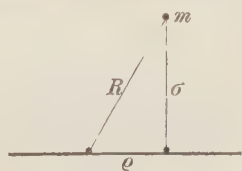
Lässt man nun den Kugelradius A in der Weise unendlich werden, dass der Punkt o unverrückt bleibt, u hingegen ins Unendliche hinabsinkt, so geht die Formel (18.) über in:

$$(19.) \quad E = \frac{m\sigma}{2\pi} \left(\frac{1}{R}\right)^3;$$

während gleichzeitig die Kugelfläche in die durch o gehende Horizontalebene sich verwandelt. Also der

Satz. — Oberhalb einer gegebenen Horizontalebene befinde sich ein Massenpunkt m , und die Horizontalebene sei mit einer materiellen Belegung versehen, deren Dichtigkeit E der Formel entspricht:

$$(20.) \quad E = \frac{m\sigma}{2\pi} \left(\frac{1}{R}\right)^3 = \frac{m\sigma}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho^2 + \sigma^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$



wo R den Abstand derjenigen Stelle, auf welche E Bezug hat, vom Punkte m bezeichnet, während σ und ϱ die aus vorhergehender Figur ersichtlichen Bedeutungen haben sollen.

Alsdann wird diese Belegung (E) mit dem Massenpunkte m äquipotential sein in Bezug auf sämtliche Punkte unterhalb der Horizontalebene.

§ 4.

Ueber den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers.

Für die Bewegung der Wärme in einem homogenen unkrystallinen Körper gilt bekanntlich die Differentialgleichung:

$$(\alpha.) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{CD}{K} \frac{\partial V}{\partial t},$$

wo V die Temperatur vorstellt, während C , D , K gegebene Constanten bezeichnen: C die spezifische Wärme des gegebenen Körpers, K seine innere Leitungsfähigkeit, und D seine Dichtigkeit. — Diese Differentialgleichung, durch welche die Temperatur V als Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und der Zeit t sich bestimmt, nimmt für den Fall des stationären Temperaturzustandes die einfachere Gestalt an*):

$$(\beta.) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad \text{oder} \quad \Delta V = 0.$$

Wir wollen nun die Temperatur V im Innern des gegebenen Körpers zu ermitteln suchen, unter der Voraussetzung, dass die Zeit des stationären Zustandes bereits eingetreten ist, und unter der fernerren Voraussetzung, dass die Temperatur an der Oberfläche des Körpers allenthalben durch Beobachtung ermittelt sei. Diese Aufgabe kann, weil V , $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ zur Zeit des stationären Zustandes im Innern des Körpers überall stetig sein werden, folgendermassen formulirt werden:

Es soll eine Function $V = V(x, y, z)$ gefunden werden, welche im Innern des gegebenen Körpers den Bedingungen entspricht:

$$(\gamma.) \quad V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{stetig}, \quad \Delta V = 0,$$

und welche gleichzeitig an der Oberfläche des Körpers vorgeschriebene Werthe besitzt.

*) Zur Zeit des stationären Zustandes wird nämlich (wie aus dem Begriff dieses Zustandes unmittelbar folgt) die Temperatur V nur von den Coordinaten x, y, z , nicht aber von der Zeit t abhängen. Und demgemäss wird also die rechte Seite der Formel (α .) für den stationären Zustand gleich Null werden.

Jene Bedingungen (γ .) für das *Innere* des Körpers werden aber stets erfüllt sein, wenn man für V das Potential irgend welcher Massen nimmt, die *ausserhalb* des Körpers liegen. Ebenso werden jene Bedingungen auch dann erfüllt sein, wenn man für V das Potential irgend einer auf der *Körperoberfläche* ausgebreiteten Massenbelegung nimmt. Demgemäss wird die in Rede stehende Aufgabe gelöst sein, sobald es gelingen sollte, folgendes Problem zu lösen.

Allgemeines Problem. — *Man denke sich auf der gegebenen geschlossenen Fläche Ω irgend eine materielle Belegung von unbekannter Dichtigkeit η ausgebreitet, und das Potential dieser unbekannten Belegung auf Punkte i innerhalb Ω mit V_i bezeichnet.*

Dieses Potential V_i soll für diejenigen Punkte i , welche unmittelbar auf Ω liegen, in bestimmter Weise gegeben sein. Es handelt sich darum, dasselbe für sämtliche Punkte i des ganzen Innenraumes von Ω zu berechnen.

Bemerkung. — Dieses Problem besitzt nur *eine* Lösung; wie sich solches leicht zeigen lässt mittelst des Satzes (X.) pg. 205. Die bei diesem Beweise einzuschlagende Methode ist genau dieselbe wie die früher, in der Bemerkung pg. 236, benutzte.

Wir wollen dieses Problem, dessen Analogie mit dem früheren Probleme p. 236 klar zu Tage liegt, in ähnlicher Art wie jenes zu behandeln suchen, nämlich dasselbe zu reduciren versuchen auf ein *neues und einfacheres* Problem.

Zu diesem Zwecke denke man sich einen *schaalenförmigen Conductor*, der die gegebene Fläche Ω zur *inneren* Begrenzungsfläche hat, und *äusserlich* von einer beliebigen andern Fläche O (z. B. von einer Kugelfläche) begrenzt ist. Dieser Conductor sei *zur Erde abgeleitet*, und der Wirkung eines *einzelnen elektrischen Massenpunktes m* ausgesetzt, der irgendwo im *innern Hohlraum* des Conductors sich befindet. Jenes neue Problem soll darin bestehen, die elektrischen Belegungen zu bestimmen, welche unter so bewandten Umständen auf den beiden Oberflächen Ω und O des Conductors entstehen werden.

Die Dichtigkeit der Belegung der *äussern* Oberfläche wird bekanntlich [wie aus dem zweiten Satze p. 229 folgt] überall $= 0$ sein. Und die Dichtigkeit ε der Belegung der *innern* Fläche Ω bestimmt sich [wie ebenfalls aus jenem Satze folgt] mittelst der Formel:

$$(1.) \quad U_a = \frac{m}{R_a} + \int \frac{\varepsilon d\omega}{E_a} = 0,$$

wo unter a *sämmtliche* Punkte des Aussenraumes von Ω zu verstehen sind, sowohl diejenigen, welche zwischen Ω und O , als auch diejenigen, welche ausserhalb O liegen [vgl. den schon citirten zweiten Satz

p. 229]. Dabei bezeichnen R_a und E_a die Abstände eines solchen Punktes a vom Massenpunkte $m(a, b, c)$ und vom Element $\varepsilon d\omega$.

Das der Formel (1.) beigefügte U_a soll nur Abbreviatur sein für die linke Seite der Formel; so dass also dieses U das von den beiden Massen m und (ε) herrührende Potential repräsentirt. Bezeichnet man die Potentiale jener beiden Massen, *einzelu* genommen, mit $U^{(m)}$ und $U^{(\varepsilon)}$, so kann man die Formel (1.) auch so schreiben:

$$(2.) \quad U_a = U_a^{(m)} + U_a^{(\varepsilon)} = 0.$$

Dabei sei in Betreff des Potentials U an *zwei Relationen* erinnert, die aus früheren allgemeinen Sätzen sich sofort ergeben. Die *eine* derselben lautet [vgl. (18.) pg. 174]:

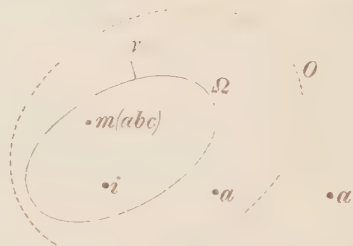
$$\overline{U}_i = \overline{U}_a,$$

also mit Rücksicht auf (1.) oder (2.):

$$(3.) \quad \overline{U}_i = 0;$$

und die *andere* lautet [vgl. (19.) pg. 174]:

$$(4.) \quad \frac{d\overline{U}_i}{dv} = 4\pi\varepsilon,$$



wo v die *äussere* Normale von Ω vorstellt; vgl. diebeistehende Figur. Mit Bezug auf diese Figur, in welcher die *äussere* Oberfläche O des schalenförmigen Conductors nur *punktirt* angedeutet ist, sei von Neuem bemerkt, dass bei der gegenwärtigen Betrachtung unter a *sämmtliche* Punkte des Aussenraumes von Ω zu verstehen sind, einerlei ob sie zwischen Ω und O , oder ausserhalb O liegen. Andererseits sind unter i *sämmtliche* Punkte des Innenraumes von Ω zu verstehen.

Dies vorangeschickt, gehen wir über zum eigentlichen Kern unserer Betrachtung, nämlich zur Aufdeckung des *gegenseitigen* Zusammenhanges der *beiden Probleme*, der darin bestehen wird, dass eine etwaige Lösung des *neuen* Problems sofort auch die Lösung des *ursprünglichen* Problems nach sich zieht.

Betrachten wir den Punkt $m(a, b, c)$ wiederum als eine *äusserst kleine* *homogene Kugel* mit dem Centrum (a, b, c) , so sind

$$(f.) \quad \begin{aligned} U_i, \quad \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_i}{\partial z}, \\ V_i, \quad \frac{\partial V_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial z} \end{aligned}$$

im Innenraume der Fläche Ω überall stetig. Denn das Potential U rührt her von jener kleinen Kugel m und von der auf Ω ausgebreiteten Be-

legung (ε); und das Potential V stammt her von der ebenfalls auf Ω zu denkenden Belegung (η).

Da nun diese Grössen (ε , η) innerhalb Ω stetig sind, so subordiniren sich die Potentiale U und V ohne Weiteres der allgemeinen Formel (A.) pg. 198:

$$(5.) \quad \iiint_{\text{über den Innenraum von } \Omega} (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = \int \left(U_i \frac{dV_i}{dv} - V_i \frac{dU_i}{dv} \right) d\omega,$$

wo ν [ebenso wie in (4.)] die äussere Normale von Ω vorstellt. Diese Formel (5.) ist, mit Rücksicht auf die Relation:

$$U = U^{(m)} + U^{(\varepsilon)},$$

und mit Rücksicht darauf, dass U [vgl. (3.)] auf der Fläche Ω *verschwindet*, auch so darstellbar:

$$(6.) \quad \iiint_{\text{über den Innenraum von } \Omega} (U \Delta V - V \Delta U^{(m)} - V \Delta U^{(\varepsilon)}) dx dy dz = - \int V_i \frac{dU_i}{dv} d\omega,$$

und kann daher, weil die von den Belegungen (ε) und (η) herrührenden Potentiale $U^{(\varepsilon)}$ und V im Innenraume von Ω den Gleichungen $\Delta U^{(\varepsilon)} = 0$ und $\Delta V = 0$ entsprechen, auch so geschrieben werden:

$$(7.) \quad - \iiint_{\text{über den Innenraum von } \Omega} V \Delta U^{(m)} dx dy dz = - \int V_i \frac{dU_i}{dv} d\omega.$$

Der hier auf der linken Seite stehende Ausdruck reducirt sich aber [mittelst der Betrachtungen pg. 222] auf

$$4\pi m V(a, b, c);$$

so dass also die Formel (7.) die Gestalt gewinnt:

$$(8.) \quad 4\pi m V(a, b, c) = - \int V_i \frac{dU_i}{dv} d\omega.$$

Hieraus folgt, falls man rechter Hand bei V_i den Index i fortlässt:

$$(9.) \quad V(a, b, c) = - \frac{1}{4\pi m} \int V \frac{dU_i}{dv} d\omega.$$

Diese Formel aber lässt den gegenseitigen Zusammenhang zwischen V und U deutlich zu Tage treten. Dieselbe ist mit Rücksicht auf (4.) auch so darstellbar:

$$(10.) \quad V(a, b, c) = - \frac{1}{m} \int V \varepsilon d\omega;$$

so dass wir also, Alles zusammengefasst, zu folgendem Satze gelangen:

Reduction des allgemeinen Problems auf die Ermittlung der charakteristischen Function U . — Soll das allgemeine Problem (pg. 243) gelöst werden, so betrachte man die gegebene Fläche Ω als die innere Oberfläche

eines zur Erde abgeleiteten schaaalenförmigen Conductors, und bezeichne die Dichtigkeit derjenigen elektrischen Belegung, welche unter diesen Umständen auf der Fläche Ω durch irgend einen innerhalb Ω gelegenen elektrischen Massenpunkt $m(a, b, c)$ inducirt werden würde*), mit ε . Als dann wird das in jenem allgemeinen Problem gesuchte Potential V im Punkte (a, b, c) den Werth haben:

$$(11.) \quad V(a, b, c) = - \frac{1}{m} \int V \varepsilon d\omega.$$

Durch dieses Integral, in welchem, abgesehen von den gegebenen Oberflächenwerthen des Potentials V , nur noch ε enthalten ist, wird die Lösung jenes allgemeinen Problems reducirt auf die Ermittlung von ε .

Setzt man übrigens:

$$(12.) \quad U = U^{(m)} + U^{(\varepsilon)},$$

wo $U^{(m)}$ und $U^{(\varepsilon)}$ die vom Massenpunkte $m(a, b, c)$ und von der Belegung (ε) auf einen variablen Punkt (x, y, z) ausgehenden Potentiale sein sollen, so kann man die Formel (11.) auch so schreiben:

$$(13.) \quad V(a, b, c) = - \frac{1}{4\pi m} \int V \frac{dU_i}{dv} d\omega,$$

wo v die äussere Normale von Ω bezeichnet.

Demgemäss mag diese Function U_i bezeichnet werden als die charakteristische Function jenes allgemeinen Problems (pg. 243); wobei allerdings zu bemerken ist, dass $U_i^{(\varepsilon)}$ und auch ε selber auf einen solchen Namen gleiches Anrecht haben würden.

Erinnern wir uns nachträglich an die ursprüngliche physikalische Bedeutung von V , nämlich an die Art und Weise, wie wir (pg. 242) zur Aufstellung des in Rede stehenden allgemeinen Problemcs gelangt sind, so können wir offenbar den durch die Formel (11.) ausgesprochenen Satz auch so ausdrücken:

Satz über den stationären Temperaturzustand. — Befindet sich ein homogener Körper im stationären Temperaturzustande, und ist die Temperatur V des Körpers an allen Stellen seiner Oberfläche Ω bekannt, so wird seine Temperatur in irgend einem innern Punkte (a, b, c) ebenfalls angebbar, nämlich von folgendem Werthe sein:

$$(14.) \quad V(a, b, c) = - \int V \frac{\varepsilon}{m} d\omega,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche Ω .

*) Die Dichtigkeit derjenigen elektrischen Belegung, welche gleichzeitig auf der äussern Begrenzungsfläche dieses schaaalenförmigen Conductors inducirt werden würde, ist bekanntlich = 0. Vgl. den zweiten Satz pg. 229.

Will man dabei Rechenschaft haben über die Bedeutung des Factors $\frac{\varepsilon}{m}$, so denke man sich die Fläche Ω als die innere Begrenzungsfläche eines zur Erde abgeleiteten schalenförmigen Conductors. Alsdann ist unter ε die Dichtigkeit derjenigen elektrischen Belegung zu verstehen, welche unter so bewandten Umständen auf Ω inducirt wird*) durch einen in (a, b, c) gelegenen Massenpunkt m . Dabei kann der Betrag m dieser Masse ad libitum fixirt, z. B. $= 1$ oder $= 5$ sein.

Wird die Oberfläche eines Körpers an allen Stellen in ein und derselben constanten Temperatur, z. B. in der Temperatur 1 erhalten, so wird offenbar, nach Eintritt des stationären Zustandes, die Temperatur in seinem Innern ebenfalls überall $= 1$ sein. Demgemäss muss das durch die Formel (14.) bestimmte $V(a, b, c)$ den Werth 1 annehmen, sobald man daselbst die rechter Hand unter dem Integral stehenden Oberflächentemperaturen V sämmtlich zu 1 macht. D. h. es muss die Gleichung stattfinden:

$$1 = - \int_m \varepsilon d\omega,$$

d. i. die Gleichung:

$$(15.) \quad \int \varepsilon d\omega = - m.$$

Diese Gleichung (15.) kann übrigens sofort auch abgelesen werden aus der vor wenig Augenblicken angegebenen *elektrostatischen* Bedeutung von ε , auf Grund eines früher über schalenförmige Conductoren erhaltenen Satzes [zweiter Satz pg. 229].

Wir sind also hier durch eine höchst einfache Betrachtung über den stationären Temperaturzustand zurückgelangt zu einem schon früher gefundenen *elektrostatischen Satze*; und wir sehen also an diesem Beispiele, wie die einzelnen Disciplinen der Physik mit einander in enger Beziehung stehen, der Art, dass man Sätze, die in der einen Disciplin auf ziemlich complicirtem Wege sich ergeben, zuweilen mit Hülfe einer ganz andern Disciplin durch unmittelbare Anschauung erhalten kann.

§ 5.

Anwendung auf die Kugel.

Die in (11.) und (14.), (15.) auftretende Dichtigkeit ε ist für den Fall, dass der gegebene Körper eine Kugel ist, leicht zu berechnen, unter Anwendung einer Methode, die völlig parallel läuft mit einer schon früher im achten Capitel (p. 177—181) benutzten Methode.

*) Vgl. die Note pg. 246.

Man gelangt in solcher Weise, was den Werth jener Dichtigkeit ε betrifft, zu folgendem Resultate:

Man denke sich einen zur Erde abgeleiteten schaaalenförmigen Conductor, der innerlich von einer Kugelfläche Ω , äusserlich aber von irgend welcher andern Fläche O begrenzt wird, auf deren Gestalt es nicht weiter ankommt. Versteht man alsdann unter ε die Dichtigkeit derjenigen elektrischen Belegung, welche auf der Kugelfläche Ω inducirt wird durch irgend einen innerhalb Ω gelegenen elektrischen Massenpunkt m , so wird ε den Werth haben):*

$$(16.) \quad \varepsilon = - \frac{m(A^2 - r^2)}{4\pi A} \left(\frac{1}{R}\right)^3,$$

wo R die Entfernung der betrachteten Stelle (auf welche ε sich bezieht) vom Punkte m vorstellt. Dabei ist unter A der Radius der Kugelfläche Ω , und unter r der Abstand des Punktes m vom Centrum dieser Fläche zu verstehen.

Lässt man A unendlich gross werden, so gelangt man, auf Grund der Formel (16.), zurück zu einem schon früher [in (20.) pg. 241] für die unendliche Ebene gefundenem Satze.

Blickt man ferner zurück auf den Satz (14.) über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, so gelangt man, unter Anwendung der Formel (16.), für den Specialfall der Kugel zu folgendem Satze:

Ueber den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel. Befindet sich eine homogene Kugel im stationären Temperaturzustande, und ist die Temperatur V der Kugel an allen Stellen ihrer Oberfläche Ω bekannt, so wird ihre Temperatur in irgend einem innern Punkte (a, b, c) ebenfalls angebbar, nämlich von folgendem Werthe sein:

$$(17.) \quad V(a, b, c) = \frac{A^2 - r^2}{4\pi A} \int \frac{V d\omega}{R^3}.$$

Hier bezeichnet R den Abstand des Elementes $d\omega$ vom Punkte (a, b, c) , ferner A den Kugelradius, und r den Centralabstand des Punktes (a, b, c) .

§ 6.

Ueber den stationären Temperaturzustand eines schaaalenförmigen homogenen Körpers.

Es handelt sich darum, die Temperatur V eines von irgend zwei Flächen Ω' und Ω'' begrenzten schaaalenförmigen homogenen Körpers zu finden, für den Fall, dass derselbe sich im stationären Zustande be-

*) Die Dichtigkeit der auf der äussern Oberfläche O entstehenden Belegung ist bekanntlich $= 0$. Vgl. den zweiten Satz pg. 229.

findet, und dass seine Oberflächentemperaturen *bekannt* sind. Mit andern Worten: *Es handelt sich darum, eine Function $V = V(x, y, z)$ zu finden, welche im Innern des Körpers, d. i. zwischen Ω' und Ω'' den Bedingungen entspricht:*

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} \text{ stetig,} \quad \Delta V = 0,$$

und welche überdies an den beiden Oberflächen Ω' und Ω'' des Körpers vorgeschriebene Werthe besitzt.

Diese Aufgabe aber wird offenbar gelöst sein, sobald es gelingen sollte, folgendes Problem zu lösen:

Allgemeines Problem. — *Man denke sich auf den gegebenen Flächen Ω' und Ω'' irgend zwei materielle Belegungen von ganz unbekannten Dichtigkeiten η' und η'' ausgebreitet, und das Potential dieser unbekannten Belegungen in Bezug auf die zwischen Ω' und Ω'' liegenden Punkte i mit V_i bezeichnet.*

Dieses Potential V_i soll für diejenigen Punkte i , welche unmittelbar auf Ω' oder Ω'' liegen, in bestimmter Weise gegeben sein. Es handelt sich darum, dasselbe für sämtliche Punkte i zwischen Ω' und Ω'' zu berechnen.

Bemerkung. — Dass dieses Problem immer nur *eine* Lösung besitzen kann, lässt sich in ähnlicher Art wie früher [vgl. die Bemerkung pg. 236] leicht nachweisen.

Dieses Problem ist, ebenso wie das vorhin (pg. 243) besprochene, auf ein einfaches *elektrostatisches Problem* reducirbar. Man setze fest, dass Ω' *innerhalb* Ω'' liege, und construiren überdies noch zwei weitere geschlossene Flächen O' und O'' , der Art, dass O' *innerhalb* Ω' , und Ω'' *innerhalb* O'' liegt. Sodann denke man sich zwei *zur Erde abgeleitete* schalenförmige Conductoren. Der eine sei begrenzt von O' und Ω' , der andere von Ω'' und O'' . Alsdann besteht jenes elektrostatische Problem in der Ermittlung derjenigen elektrischen Belegungen, welche auf O' , Ω' , Ω'' und O'' entstehen werden unter der Einwirkung irgend eines *zwischen Ω' und Ω'' aufgestellten elektrischen Massenpunktes* $m(a, b, c)$.

Die Dichtigkeiten der auf O' und O'' entstehenden Belegungen sind bekanntlich überall $= 0$ [erster und zweiter Satz pg. 227, 228 u. 229]. Was ferner die Dichtigkeiten ε' und ε'' derjenigen beiden Belegungen betrifft, welche auf Ω' und Ω'' entstehen, so muss das *elektrische Gesammpotential* — dasselbe mag U heissen — *constant, und zwar $= 0$* sein für alle Punkte des *einen*, und ebenso auch für alle Punkte des *andern* Conductors. Mit andern Worten: Es muss dieses Potential $U = 0$ sein für alle Punkte zwischen O' und Ω' , und ebenso auch für alle Punkte zwischen Ω'' und O'' . Ja man kann [auf Grund der

soeben citirten beiden Sätze] noch hinzufügen, dass dasselbe auch $= 0$ sein muss für alle Punkte *innerhalb* O' und ebenso für alle Punkte *ausserhalb* O'' . Demgemäss erhält man die Formeln:

$$(1.) \quad U_{a'} = 0 \quad \text{und} \quad U_{a''} = 0,$$

wo a' *jeden* Punkt *innerhalb* Ω' und a'' *jeden* Punkt *ausserhalb* Ω'' repräsentirt. Jene Dichtigkeiten ε' und ε'' müssen also der Art beschaffen sein, dass diesen beiden Bedingungen (1.) entsprochen wird. Dabei ist zu beachten, dass das in diesen Bedingungen auftretende elektrische Gesamtpotential U den Werth hat:

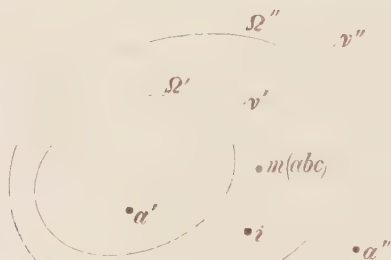
$$(2.) \quad U = U^{(m)} + U^{(\varepsilon')} + U^{(\varepsilon'')},$$

d. i. den Werth:

$$(3.) \quad U = \frac{m}{R} + U^{(\varepsilon')} + U^{(\varepsilon'')},$$

wo $U^{(m)} = \frac{m}{R}$, und $U^{(\varepsilon')}$ und $U^{(\varepsilon'')}$ diejenigen Potentiale vorstellen, welche vom Massenpunkte $m(a, b, c)$ und jenen Belegungen (ε') und (ε'') , einzeln genommen, herrühren.

Bezeichnet man die *Oberflächenwerthe* des Gesamtpotentials U , ebenso wie früher, durch horizontale Ueberstreichung, und zwar durch



einen oder durch *zwei* horizontale Striche, je nachdem die Fläche Ω' oder Ω'' gemeint sein soll, und bezeichnet man überdies*) sämtliche Punkte *zwischen* Ω' und Ω'' mit i , so ist [vgl. (18.) pg. 174]:

$$U_i = \overline{U}_{a'} \quad \text{und} \quad \overline{U}_i = \overline{U}_{a''},$$

also mit Rücksicht auf (1.):

$$(4.) \quad \overline{U}_i = 0 \quad \text{und} \quad \overline{U}_i = 0.$$

*) Bei dieser Bezeichnungsweise zerfallen also sämtliche Punkte des ganzen unendlichen Raumes in *drei* Kategorien, nämlich die Punkte a' innerhalb Ω' , ferner in die Punkte i zwischen Ω' und Ω'' , endlich in die Punkte a'' ausserhalb Ω'' . Vgl. die Figur.

Ferner ist alsdann [vgl. (19.) pg. 174]:

$$(5.) \quad \frac{d\bar{U}_i}{d\nu'} = -4\pi\varepsilon' \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{U}_i}{d\nu''} = +4\pi\varepsilon'',$$

wo ν' und ν'' die äusseren Normalen der Flächen Ω' und Ω'' vorstellen [vgl. die Figur].

Betrachtet man nun den Massenpunkt $m(a, b, c)$ als eine äusserst kleine homogene Kugel mit dem Centrum (a, b, c) , so subordiniren sich das Potential U_i und das in dem allgemeinen Problem gesuchte Potential V_i der Formel (B.) pg. 199:

$$(6.) \quad \int \int \int \left(U \Delta V - V \Delta U \right) dx dy dz = + \int \left(U_i \frac{dV_i}{d\nu''} - V_i \frac{dU_i}{d\nu''} \right) d\omega'' \\ \text{über den Raum zwischen } \Omega' \text{ und } \Omega'' \\ - \int \left(U_i \frac{dV_i}{d\nu'} - V_i \frac{dU_i}{d\nu'} \right) d\omega'.$$

Hier ist *linker* Hand $\Delta V = 0$, weil V von gewissen (noch unbekannten) auf Ω' und Ω'' ausgebreiteten Belegungen (η') und (η'') herrührt. Ferner ist das *linker* Hand stehende ΔU , zufolge (2.), $= \Delta U^{(m)}$. Ferner ist, was die *rechte* Seite betrifft, U_i auf Ω' und auf Ω'' überall $= 0$; wie aus (4.) ersichtlich. Demgemäss reducirt sich die Formel auf:

$$(7.) \quad - \int \int \int V \Delta U^{(m)} dx dy dz = + \int V_i \frac{dU_i}{d\nu'} d\omega' - \int V_i \frac{dU_i}{d\nu''} d\omega'' \\ \text{über den Raum zwischen } \Omega' \text{ und } \Omega''$$

Jetzt erkennt man leicht [vgl. die Betrachtungen auf pg. 222], dass die *linke* Seite dieser Formel $= 4\pi m V(a, b, c)$ ist. Demgemäss gelangt man, unter Rücksichtnahme auf die Relationen (5.), zu folgendem Resultate:

$$(8.) \quad m V(a, b, c) = - \int V \varepsilon' d\omega' - \int V \varepsilon'' d\omega''.$$

Das in dieser Formel (8.) enthaltene Resultat kann mit Rücksicht darauf, dass die *Dicken* der beiden schalenförmigen Conductoren ganz *beliebig*, also z. B. auch *beliebig klein* sein dürfen, folgendermassen ausgedrückt werden:

Satz über den stationären Temperaturzustand eines schalenförmigen Körpers. -- *Beindet sich ein schalenförmiger homogener Körper im stationären Temperaturzustande, und ist die Temperatur V dieses Körpers an seinen beiden Oberflächen Ω' und Ω'' bekannt, so wird seine Temperatur in irgend einem innern Punkte d. i. in irgend einem zwischen Ω' und Ω'' gelegenen Punkte (a, b, c) ebenfalls angebbar, nämlich von folgendem Werthe sein:*

$$(9.) \quad V(a, b, c) = - \int V \frac{\varepsilon'}{m} d\omega' - \int V \frac{\varepsilon''}{m} d\omega'',$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\omega'$ und $d\omega''$ der Flächen Ω' und Ω'' .

Will man die hier auftretenden Factoren $\frac{\varepsilon'}{m}$ und $\frac{\varepsilon''}{m}$ in einfacher Weise definirt haben, so denke man sich den gegebenen Körper, in elektrischer Beziehung, als einen Isolator, seine beiden Oberflächen aber metallisch bekleidet (mit Metallfolie überzogen), und diese metallischen Bekleidungen zur Erde abgeleitet. Alsdann repräsentiren ε' und ε'' die Dichtigkeiten derjenigen elektrischen Belegungen, welche unter so bewandten Umständen auf Ω' und Ω'' durch einen in (a, b, c) gedachten elektrischen Massenpunkt m inducirt werden würden*).

Sind die gegebenen Oberflächentemperaturen alle von ein und demselben constanten Werthe, etwa alle $= 1$, so wird, nach Eintritt des stationären Zustandes, offenbar auch im Innern des Körpers die Temperatur überall $= 1$ sein. Lässt man also in (9.) die unter den Integralen stehenden V 's zu 1 werden, so muss der Werth $V(a, b, c)$ ebenfalls gleich 1 werden. Demgemäss ergibt sich die Formel:

$$(10.) \quad m = - \int \varepsilon' d\omega' - \int \varepsilon'' d\omega''.$$

Die Gesamtmasse der beiden vorhin genannten inducirten Belegungen (ε') und (ε'') ist also stets $= -m$, wo m die Masse des inducirenden Punktes vorstellt; — ein Satz, der übrigens auch direct durch elektrostatische Betrachtungen ohne grosse Mühe beweisbar sein würde.

§ 7.

Anwendung auf eine Kugelschaale.

Sind die beiden Begrenzungsflächen Ω' und Ω'' concentrische Kugelflächen mit den Radien A_1 und A_2 , so kann man die Werthe von ε' und ε'' leicht berechnen, unter Anwendung eines Polarcordinatensystems, dessen Anfangspunkt im gemeinschaftlichen Centrum der beiden Kugelflächen liegt.

Es sei $A_1 < A_2$. Ferner sei der Massenpunkt $m(\varrho_m, \mu_m, \varphi_m)$ zwischen Ω' und Ω'' beliebig gegeben, jedoch so dass die Relation stattfindet:

$$(11.) \quad A_1 < \varrho_m < A_2.$$

Bezeichnet man ferner irgend zwei auf Ω' und Ω'' gelegene Punkte

*) Ω' und Ω'' repräsentiren je eine Begrenzungsfläche jener metallischen Bekleidungen. Auf den beiden andern Begrenzungsflächen O' und O'' jener beiden Bekleidungen wird keine Spur von freier Elektricität anzutreffen sein. Vgl. den ersten Satz, pg. 227, 228 und den zweiten Satz pg. 229.

respective mit (A_1, μ_1, φ_1) und (A_2, μ_2, φ_2) , so kann man die in diesen Punkten vorhandenen unbekannten Werthe von ε' und ε'' nach Kugelfunctionen sich entwickelt vorstellen:

$$(12.) \quad \begin{aligned} \varepsilon' &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n'(\mu_1, \varphi_1), \\ \varepsilon'' &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n''(\mu_2, \varphi_2). \end{aligned}$$

Diese Dichtigkeiten ε' und ε'' sind nun [vgl. (1.) pg. 250] der Art einzurichten, dass das elektrische Gesamtpotential

$$(13.) \quad U = U^{(m)} + U^{(\varepsilon')} + U^{(\varepsilon'')}$$

für alle Punkte *innerhalb* Ω' , und ebenso für alle Punkte *ausserhalb* Ω'' verschwindet. Betrachtet man zuvörderst irgend einen Punkt (ϱ, μ, φ) *innerhalb* Ω' , so ergeben sich mit Bezug auf diesen Punkt für $U^{(m)}$, $U^{(\varepsilon')}$ und $U^{(\varepsilon'')}$ die Werthe:

$$(14.) \quad U^{(m)} = m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{\varrho_m^{n+1}} P_n(\cos \gamma),$$

$$(15.) \quad U^{(\varepsilon')} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{\varrho^n}{A_1^{n-1}} Y_n'(\mu, \varphi),$$

$$(16.) \quad U^{(\varepsilon'')} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{\varrho^n}{A_2^{n-1}} Y_n''(\mu, \varphi),$$

wo γ die gegenseitige Neigung zwischen (μ, φ) und (μ_m, φ_m) bezeichnet*). Die Summe dieser drei Ausdrücke (14.), (15.), (16.) soll aber für jedweden Punkt (ϱ, μ, φ) *innerhalb* Ω' *verschwinden*. Demgemäss müssen in dieser Summe die Coefficienten der Potenzen von ϱ *einzelnen* verschwinden; d. h. es muss die Relation stattfinden:

$$(17.) \quad \frac{m}{\varrho_m^{n+1}} P_n(\cos \gamma) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[\frac{1}{A_1^{n-1}} Y_n'(\mu, \varphi) + \frac{1}{A_2^{n-1}} Y_n''(\mu, \varphi) \right] = 0.$$

Beachtet man nun andererseits, dass jenes Gesamtpotential U (13.) auch verschwinden soll für jedweden Punkt (ϱ, μ, φ) *ausserhalb* Ω'' , so gelangt man in analoger Weise zu folgender zweiten Relation:

$$(18.) \quad m \varrho_m^n P_n(\cos \gamma) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[A_1^{n+2} Y_n'(\mu, \varphi) + A_2^{n+2} Y_n''(\mu, \varphi) \right] = 0.$$

Aus diesen Relationen (17.), (18.), in denen γ die Neigung von (μ, φ) gegen (μ_m, φ_m) vorstellt, sind die Functionen

*) Die Berechnung der Formeln (15.), (16.) ist hier *nicht* mitgetheilt. Dieselbe ergibt sich in bekannter Weise, unter Anwendung der Integraleigenschaften der Kugelfunctionen, d. i. unter Anwendung der Formeln pg. 77.

$$Y'_n(\mu, \varphi) \quad \text{und} \quad Y''_n(\mu, \varphi)$$

sofort berechenbar, und zwar für beliebige Werthe der Argumente (μ, φ) . Substituirt man die in solcher Weise für diese Functionen sich ergebenden Ausdrücke in (12.), so erhält man:

$$(19.) \quad \begin{cases} \varepsilon' = -\frac{m}{A_1^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{A_1}{\varrho_m} \right)^{n+1} \frac{A_2^{2n+1} - \varrho_m^{2n+1}}{A_2^{2n+1} - A_1^{2n+1}} P_n(\cos \gamma_1), \\ \varepsilon'' = -\frac{m}{A_2^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{A_2}{\varrho_m} \right)^{n+1} \frac{A_1^{2n+1} - \varrho_m^{2n+1}}{A_1^{2n+1} - A_2^{2n+1}} P_n(\cos \gamma_2). \end{cases}$$

Dabei sind die Oberflächenpunkte, auf welche ε' und ε'' Bezug haben, nach wie vor mit (A_1, μ_1, φ_1) und (A_2, μ_2, φ_2) bezeichnet zu denken; gleichzeitig sind unter γ_1 und γ_2 die Neigungen der Richtungen (μ_1, φ_1) und (μ_2, φ_2) gegen die feste Richtung (μ_m, φ_m) zu verstehen.

Durch die Formeln (19.) ist die Berechnung von ε' und ε'' vollendet. Und man gelangt daher, auf Grund des allgemeinen Satzes pg. 251, zu folgendem Resultate:

Ueber den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugelschaale. — *Beindet sich eine homogene Kugelschaale im stationären Temperaturzustande, und ist ihre Temperatur V an allen Stellen ihrer beiden Oberflächen Ω' und Ω'' bekannt, so wird ihre Temperatur in irgend einem innern (d. i. zwischen Ω' und Ω'' liegenden) Punkte $(\varrho_m, \mu_m, \varphi_m)$ ebenfalls angebar, nämlich von folgendem Werthe sein:*

$$(20.) \quad V(\varrho_m, \mu_m, \varphi_m) = - \int V \frac{\varepsilon'}{m} d\omega' - \int V \frac{\varepsilon''}{m} d\omega''.$$

Hier haben $\frac{\varepsilon'}{m}$ und $\frac{\varepsilon''}{m}$ die in (19.) angegebenen Bedeutungen. Dasselbst repräsentiren $A_1 < A_2$ die Radien der beiden Flächen Ω' und Ω'' , ferner γ_1 und γ_2 diejenigen Winkel, unter denen die nach $d\omega'$ und $d\omega''$ hinlaufenden Richtungen (μ_1, φ_1) und (μ_2, φ_2) gegen die Richtung (μ_m, φ_m) geneigt sind.

Beiläufig bemerkt, ergeben sich aus (19.), unter Anwendung der Integraleigenschaften p. 77, die Formeln:

$$(21.) \quad \begin{aligned} \int \varepsilon' d\omega' &= \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \varepsilon' A_1^2 d\mu_1 d\varphi_1 = -m \frac{A_1}{\varrho_m} \frac{A_2 - \varrho_m}{A_2 - A_1}, \\ \int \varepsilon'' d\omega'' &= \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \varepsilon'' A_2^2 d\mu_2 d\varphi_2 = -m \frac{A_2}{\varrho_m} \frac{A_1 - \varrho_m}{A_1 - A_2}; \end{aligned}$$

woraus durch Addition folgt:

$$(22.) \quad \int \varepsilon' d\omega' + \int \varepsilon'' d\omega'' = -m.$$

Diese letzte Formel bestätigt den in (10.) angegebenen *elektrostatischen Satz*.

Specialfall: $A_2 = \infty$. — In diesem Falle verliert sich die Kugelfläche Ω'' ins Unendliche; so dass nur noch die *eine* Kugelfläche Ω' übrig bleibt: während gleichzeitig der gegebene Punkt $m(\varrho_m, \mu_m, \varphi_m)$ *ausserhalb* Ω' in seiner ursprünglichen Lage verharret. Die Formeln (19.) nehmen in diesem Falle die Gestalt an:

$$(23.) \quad \varepsilon' = - \frac{m}{A_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{A_1}{\varrho_m} \right)^{n+1} P_n(\cos \gamma_1), \quad \text{und} \quad \varepsilon'' = 0.$$

Dieser Werth von ε' ist (bis auf die etwas andere Bezeichnungsweise) identisch mit dem in der Formel (8.) pg. 179 angegebenen Werthe, falls man nur in diesem letztern Werthe das mit $\left(\frac{M}{A} + \frac{M_1}{A_1} \right)$ behaftete erste Glied fortlässt. Aus dieser Identität ergibt sich, unter Rücksichtnahme auf (11.) pg. 180, dass der Werth von ε' (23.) folgendermassen darstellbar ist:

$$(24.) \quad \varepsilon' = - \frac{m(\varrho_m^2 - A_1^2)}{4\pi A_1} \left(\frac{1}{R} \right)^3,$$

wo alsdann R die Entfernung derjenigen Oberflächenstelle, auf welche ε' Bezug hat, vom Punkte $m(\varrho_m, \mu_m, \varphi_m)$ vorstellt.

Zweiter Specialfall: $A_1 = 0$. — In diesem Falle reducirt sich die Kugelfläche Ω' mit ihrer Belegung (ε') auf einen *einzelnen Massenpunkt* im Centrum. Gleichzeitig aber ergibt sich aus der ersten Formel (21.), dass die *Masse* dieses Punktes $= 0$ wird. Es bleibt also nur noch die Massenbelegung (ε'') auf Ω'' übrig. Für die Dichtigkeit derselben ergibt sich aus (19.) die Formel:

$$(25.) \quad \varepsilon'' = - \frac{m}{A_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{\varrho_m}{A_2} \right)^n P_n(\cos \gamma_2).$$

Diese Reihe ist wiederum summirbar, in analoger Weise, wie früher die Reihe (8.) pg. 179 summirt wurde. Man gelangt in solcher Weise zu der Formel*):

$$(26.) \quad \varepsilon'' = - \frac{m(A_2^2 - \varrho_m^2)}{4\pi A_2} \left(\frac{1}{R} \right)^3,$$

wo R den Abstand derjenigen Oberflächenstelle, auf welche ε'' Bezug hat, vom Punkte $m(\varrho_m, \mu_m, \varphi_m)$ bezeichnet.

Die Formel (24.) ist identisch mit (14.) pg. 240. Desgleichen ist die Formel (26.) identisch mit (16.) pg. 248; wie solches *a priori* zu erwarten stand.

*) Man vgl. die Erläuterungen am Schluss dieses Werkes.

§ 8.

Ueber den stationären Temperaturzustand einer unendlich grossen von zwei Parallelebenen begrenzten homogenen Platte.

Ist eine von zwei parallelen Ebenen Ω' und Ω'' begrenzte, nach allen Seiten ins Unendliche sich ausdehnende *homogene Platte* gegeben, so wird man die beiden Ebenen Ω' und Ω'' als zwei concentrische Kugelflächen ansehen können, deren Centrum im Unendlichen liegt. Und demgemäss wird man die Resultate des letzten Paragraphs auf den gegenwärtigen Fall der *Platte* dadurch übertragen können, dass man in den dortigen Formeln die Radien A_1 und A_2 ins Unendliche anwachsen lässt. Zugleich erkennt man, dass man als Lösung des gegenwärtigen Problems, ebenso wie in (20.) pg. 254, eine Formel von folgender Gestalt erhalten wird:

$$(1.) \quad V(a, b, c) = - \int V \frac{\varepsilon'}{m} d\omega' - \int V \frac{\varepsilon''}{m} d\omega'';$$

so dass es sich also nur noch um die Bestimmung von ε' und ε'' handelt.

Die gegenwärtigen Werthe von ε' und ε'' müssen nun, wie schon angedeutet, aus den damaligen Formeln (19.) pg. 254 dadurch ableitbar sein, dass man A_1 und A_2 unendlich gross werden lässt. Doch wollen wir hier zur Bestimmung von ε' und ε'' einen etwas *andern* Weg einschlagen, der von ganz eigenthümlicher Natur sein wird, und etwa bezeichnet werden kann als die *Methode der Spiegelpunkte*. Dabei sei zunächst an Folgendes erinnert:

Sind Ω' und Ω'' zwei *geschlossene Flächen*, und liegt Ω' *innerhalb* Ω'' , und ist zwischen Ω' und Ω'' irgend ein Massenpunkt $m(a, b, c)$ gegeben, so sind die Belegungen (ε') und (ε'') der Art zu bestimmen, dass das von den Massen m , (ε'), (ε'') herrührende Gesamtpotential

$$(f.) \quad U = \frac{m}{R} + U(\varepsilon') + U(\varepsilon'')$$

für alle Punkte *innerhalb* Ω' , und ebenso auch für alle Punkte *ausserhalb* Ω'' *verschwindet*; wie solches früher [vgl. (1.) pg. 250] angedeutet wurde durch die Formeln

$$(g.) \quad U_{a'} = 0 \quad \text{und} \quad U_{a''} = 0,$$

wobei a' jedweden Punkt *innerhalb* Ω' , und a'' jedweden Punkt *ausserhalb* Ω'' vorstellen sollte.

Bringen wir diese von früher her bekannte allgemeine Vorschrift auf den gegenwärtigen Fall in Anwendung, wo Ω' und Ω'' *parallele*

Ebenen sind, und denken wir uns dabei diese Ebenen *horizontal* und Ω' *oberhalb* Ω'' , so wird zu sagen sein: Jene Belegungen (ε') und (ε'') sind der Art zu bestimmen, dass das mit U bezeichnete Gesamtpotential für alle Punkte Ω' *oberhalb* Ω' , und für alle Punkte *unterhalb* Ω'' *verschwindet*; was angedeutet werden kann durch $\text{---} \cdot m \text{---}$ Ω'' die Formeln:

$$(2.) \quad \begin{aligned} U &= 0 \quad \text{für alle Punkte oberhalb } \Omega', \\ U &= 0 \quad \text{für alle Punkte unterhalb } \Omega''. \end{aligned}$$

Uebrigens wird es zweckmässig sein, den Ausdruck (f.) des Gesamtpotentials fortan folgendermassen anzudeuten:

$$U = \text{Pot } (m) + \text{Pot } (\varepsilon') + \text{Pot } (\varepsilon''),$$

oder, etwas kürzer, auch so anzudeuten:

$$U = \text{Pot } [m + (\varepsilon') + (\varepsilon'')].$$

Alsdann nehmen die Bedingungen (2.) die Gestalt an:

$$(3.) \quad \begin{aligned} \text{Pot } [m + (\varepsilon') + (\varepsilon'')] &= 0 \quad \text{für alle Punkte oberhalb } \Omega', \\ \text{Pot } [m + (\varepsilon') + (\varepsilon'')] &= 0 \quad \text{für alle Punkte unterhalb } \Omega''. \end{aligned}$$

Es handelt sich also darum, die Dichtigkeiten ε' und ε'' der auf den beiden Ebenen Ω' und Ω'' ausgebreiteten Belegungen (ε') und (ε'') in solcher Weise einzurichten, dass den Bedingungen (3.) Genüge geschieht. Dabei bezeichnet m einen zwischen Ω' und Ω'' ad libitum markirten Massenpunkt.

Unser Instrument zur Lösung dieser Aufgabe besteht in der Theorie der äquipotentialen Belegungen [Satz (20.) pg. 241]. Dabei werden wir, falls irgendwo im Raume ein Massenpunkt μ gegeben ist, die diesem Punkte μ äquipotentiale Belegung der Ebene Ω' mit (E'), oder genauer mit

$$(E'_\mu)$$

bezeichnen. Selbstverständlich erstreckt sich diese Aequipotentialität nicht auf sämtliche Raumpunkte, sondern, falls man die Lage von μ als *diessseits* der Ebene Ω' bezeichnet, nur auf diejenigen Raumpunkte, welche *jenseits* Ω' liegen. Was die *andere* Ebene Ω'' betrifft, so mag in analoger Weise die mit μ äquipotentiale Belegung derselben durch

$$(E''_\mu)$$

angedeutet sein. Demgemäss gelten z. B., was den *zwischen* Ω' und Ω'' liegenden Massenpunkt m betrifft, die Formeln:

$$\begin{aligned} \text{Pot } (m) &= \text{Pot } (E'_m) \quad \text{für alle Punkte oberhalb } \Omega', \\ \text{Pot } (m) &= \text{Pot } (E''_m) \quad \text{für alle Punkte unterhalb } \Omega'', \end{aligned}$$

oder, ein wenig einfacher geschrieben, die Formeln:

$$(A') \quad \text{Pot } [m - (E'_m)] = 0 \quad \text{für alle Punkte oberhalb } \Omega',$$

$$(A'') \quad \text{Pot } [m - (E''_m)] = 0 \quad \text{für alle Punkte unterhalb } \Omega''.$$

Es sei nun [vgl. die Figur] m_2 das Spiegelbild von m in Bezug auf die Ebene Ω'' , und die Masse des Punktes m_2 ebenso gross wie die von m selber, also $m_2 = m$. Alsdann sind, was die mit m_2 äquipotentialen Belegungen der Ebenen Ω' und Ω'' betrifft, die Formeln zu notiren:

$$\text{Pot } [m_2 - (E'_{m_2})] = 0 \quad \text{für alle Punkte oberhalb } \Omega',$$

$$\text{Pot } [m_2 - (E''_{m_2})] = 0 \quad \text{für alle Punkte oberhalb } \Omega''.$$

Für die Punkte oberhalb Ω' gelten also *beide* Formeln; und demgemäss gelangt man durch Subtraction derselben zu dem Resultate:

$$\text{Pot } [(E''_{m_2}) - (E'_{m_2})] = 0 \quad \text{für alle Punkte oberhalb } \Omega'.$$

Da die Punkte m und m_2 auf derselben Normale der Ebene Ω'' liegen und *gleich weit* von Ω'' entfernt sind, so sind offenbar die diesen beiden Punkten *entsprechenden Belegungen*

$$(E'_m) \quad \text{und} \quad (E''_{m_2})$$

unter einander *identisch**); so dass man also die letzte Formel auch so schreiben kann:

$$(B') \quad \text{Pot } [(E'_m) - (E'_{m_2})] = 0$$

für alle Punkte oberhalb Ω' .

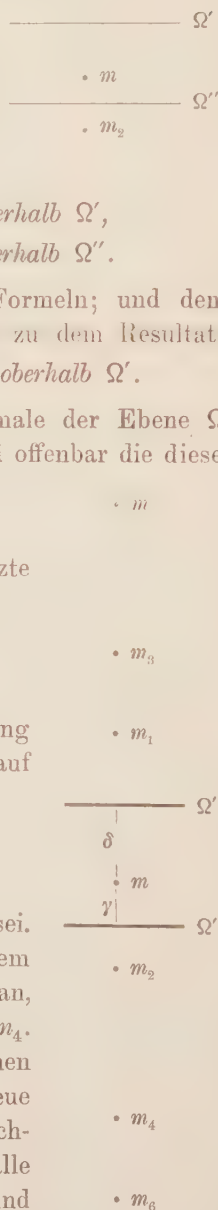
In genau derselben Weise wird die Betrachtung desjenigen Spiegelpunktes m_1 , welchen m in Bezug auf Ω' besitzt, folgende Formel liefern:

$$(B'') \quad \text{Pot } [(E'_m) - (E''_{m_1})] = 0$$

für alle Punkte unterhalb Ω'' ;

wobei wiederum vorausgesetzt ist, dass $m_1 = m$ sei.

Lässt man jetzt die Punkte m_1 und m_2 von Neuem an den beiden Ebenen sich spiegeln, so erhält man, ausser m , nur noch *zwei* neue Punkte m_3 und m_4 . Lässt man diese letzteren abermals an jenen Ebenen sich spiegeln, so ergeben sich wiederum *zwei* neue Punkte m_5 und m_6 . U. s. f. Dabei mag die Bezeichnung [vgl. die Figur] so eingerichtet werden, dass alle Spiegelpunkte mit *ungeradem* Index oberhalb Ω' , und



*) Wie z. B. ein Blick auf die Formel (20.) pg. 241 sofort erkennen lässt.

alle mit *geradem* Index *unterhalb* Ω'' liegen. Auch mögen all' diese Massen m, m_1, m_2, m_3, m_4 , etc. *gleich gross* gedacht werden. Alsdann stehen die in (B') betrachteten Punkte m und m_2 in derselben Beziehung zu einander, wie m_1 und m_4 , wie ferner m_3 und m_6 , u. s. w.; so dass man also folgendes System von Formeln erhält, deren erste und zweite nur eine Wiederholung von (A') und (B') sind:

$$(C') \quad \left. \begin{aligned} \text{Pot } [+ m \quad - (E'_m)] &= 0, \\ \text{Pot } [- (E''_m) + (E'_{m_2})] &= 0, \\ \text{Pot } [+ (E''_{m_1}) - (E'_{m_4})] &= 0, \\ \text{Pot } [- (E''_{m_3}) + (E'_{m_6})] &= 0, \\ \text{Pot } [+ (E''_{m_5}) - (E'_{m_8})] &= 0, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für alle Punkte} \\ \text{oberhalb } \Omega'. \end{array}$$

In analoger Weise schliesst sich den Formeln (A''), (B'') folgendes Formelsystem an:

$$(C'') \quad \left. \begin{aligned} \text{Pot } [+ m \quad - (E''_m)] &= 0, \\ \text{Pot } [- (E'_m) + (E''_{m_1})] &= 0, \\ \text{Pot } [+ (E'_{m_2}) - (E''_{m_3})] &= 0, \\ \text{Pot } [- (E'_{m_4}) + (E''_{m_6})] &= 0, \\ \text{Pot } [+ (E'_{m_8}) - (E''_{m_{10}})] &= 0, \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für alle Punkte} \\ \text{unterhalb } \Omega''. \end{array}$$

Addirt man jetzt sämmtliche in (C') aufgestellten Formeln, so findet man, dass das Potential der Massen:

$$(D.) \quad \left\{ \begin{aligned} m - (E'_m + E''_m) + (E'_{m_2} + E''_{m_1}) - (E'_{m_4} + E''_{m_3}) \\ + (E'_{m_6} + E''_{m_5}) - (E'_{m_8} + E''_{m_7}) + \dots \text{ in inf. } \end{aligned} \right\}$$

für alle Punkte *oberhalb* Ω' verschwindet. Andererseits aber wird das Potential dieser selben Massen auch verschwinden für alle Punkte *unterhalb* Ω'' ; wie solches durch Addition der Formeln (C'') sich ergibt.

Solches constatirt, übersieht man nun sofort, dass den in (3.) an die Belegungen (ε') und (ε'') gestellten Anforderungen Genüge geschieht, sobald man für die Dichtigkeiten derselben folgende Werthe nimmt:

$$(4.) \quad \varepsilon' = -E'_m + E'_{m_2} - E'_{m_4} + E'_{m_6} - E'_{m_8} + E'_{m_{10}} - + \dots$$

$$(5.) \quad \varepsilon'' = -E''_m + E''_{m_1} - E''_{m_3} + E''_{m_5} - E''_{m_7} + E''_{m_9} - + \dots$$

Um diese Formeln (4.) weiter entwickeln zu können, mögen zunächst die Abstände des Punktes m von den Ebenen Ω' und Ω'' respective mit δ und γ bezeichnet werden; so dass also

$$(6.) \quad D = \delta + \gamma$$

den gegenseitigen Abstand jener beiden Ebenen repräsentirt. Alsdann haben die Abstände $\delta, \delta_2, \delta_4, \delta_6$, etc. der Punkte m, m_2, m_4, m_6 , etc. von der *obern* Ebene Ω' , wie man leicht findet, die Werthe:

$$(7.) \quad \begin{aligned} \delta &= \delta, & \delta_4 &= 2D + \delta, & \delta_8 &= 4D + \delta, & \text{etc.}, \\ \delta_2 &= 2D - \delta, & \delta_6 &= 4D - \delta, & \text{etc.}, \end{aligned}$$

und gleichzeitig ergeben sich alsdann für die Abstände $\gamma, \gamma_1, \gamma_3, \gamma_5$, etc. der Punkte m, m_1, m_3, m_5 , etc. von der *untern* Ebene Ω'' folgende Werthe*):

$$(8.) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= D + \delta, & \gamma_5 &= 3D + \delta, & \gamma_9 &= 5D + \delta, & \text{etc.}, \\ \gamma &= D - \delta, & \gamma_3 &= 3D - \delta, & \gamma_7 &= 5D - \delta, & \text{etc.} \end{aligned}$$

Ueberdiess ist zu beachten, dass die angewendeten Spiegelpunkte alle *dieselbe* Masse haben sollen, wie der ursprüngliche Punkt m :

$$(9.) \quad m = m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = \text{etc.}$$

Die Dichtigkeiten E in (4.), (5.) sind nun leicht angebbar auf Grund des Satzes (20.) pg. 241. Versteht man nämlich unter μ irgend einen der betrachteten Punkte, ferner unter Ω irgend eine der beiden Ebenen Ω', Ω'' , so wird die *Dichtigkeit* E_μ der mit μ äquipotentialen Belegung der Ebene Ω , zufolge jenes Satzes, den Werth haben:

$$(10.) \quad E_\mu = \frac{\mu \sigma}{2\pi} \left(\frac{1}{\varrho^2 + \sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \mu f(\varrho, \sigma),$$

wo σ ein vom Punkte μ auf die Ebene Ω herabgelassenes Perpendikel vorstellt, während ϱ den Abstand der betrachteten Stelle (auf welche die Dichtigkeit E_μ sich bezieht) von diesem Perpendikel bezeichnet. Dabei soll das zugefügte $\mu/(\varrho, \sigma)$ nur als Abbreviatur dienen für den Ausdruck rechter Hand.

Markirt man also z. B. auf der gegebenen Ebene Ω' irgend einen Punkt im Abstände ϱ von der durch m gehenden Verticalen, und denkt man sich die Gleichung (4.) auf diesen Punkt bezogen, so erhält man, auf Grund der Formel (10.):

$$\varepsilon' = m \left\{ \begin{aligned} &-f(\varrho, \delta) - f(\varrho, \delta_4) - f(\varrho, \delta_8) - f(\varrho, \delta_{12}) - \cdots \\ &+ f(\varrho, \delta_2) + f(\varrho, \delta_6) + f(\varrho, \delta_{10}) + \cdots \end{aligned} \right\}.$$

Ebenso erhält man aus (5.) für einen auf Ω'' gelegenen Punkt die Dichtigkeit:

$$\varepsilon'' = m \left\{ \begin{aligned} &+ f(\varrho, \gamma_1) + f(\varrho, \gamma_5) + f(\varrho, \gamma_9) + \cdots \\ &- f(\varrho, \gamma) - f(\varrho, \gamma_3) - f(\varrho, \gamma_7) - \cdots \end{aligned} \right\},$$

*) All' diese Abstände δ_h und γ_h sind hier ihrem *absoluten* Betrage nach angegeben.

wo wiederum q den Abstand des Punktes von der durch m gehenden Verticallinie bezeichnen soll. Diese Werthe von ε' , ε'' sind mit Rücksicht auf (7.), (8.) auch so darstellbar:

$$(11.) \varepsilon' = m \left\{ \begin{aligned} &-f(q, \delta) - f(q, 2D + \delta) - f(q, 4D + \delta) - f(q, 6D + \delta) - \dots \\ &+ f(q, 2D - \delta) + f(q, 4D - \delta) + f(q, 6D - \delta) + \dots \end{aligned} \right\},$$

$$(12.) \varepsilon'' = m \left\{ \begin{aligned} &+ f(q, D + \delta) + f(q, 3D + \delta) + f(q, 5D + \delta) + \dots \\ &- f(q, D - \delta) - f(q, 3D - \delta) - f(q, 5D - \delta) - \dots \end{aligned} \right\}.$$

Nun folgt aus (10.), falls man daselbst den Buchstaben σ durch δ ersetzt:

$$f(q, \delta) = \frac{\delta}{2\pi} \left(\frac{1}{q^2 + \delta^2} \right)^{\frac{3}{2}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\alpha.) \quad f(q, \delta) = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \delta} \frac{1}{\sqrt{q^2 + \delta^2}}.$$

Hieraus folgt, falls k eine beliebige Constante vorstellt:

$$(\beta.) \quad f(q, k + \delta) = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \delta} \frac{1}{\sqrt{q^2 + (k + \delta)^2}},$$

$$(\gamma.) \quad f(q, k - \delta) = + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \delta} \frac{1}{\sqrt{q^2 + (k - \delta)^2}}.$$

Und mit Rücksicht auf diese Ausdrücke $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ sind die Formeln (11.), (12.) folgendermassen darstellbar:

$$(13.) \quad \varepsilon' = + \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \delta} \frac{1}{\sqrt{q^2 + \delta^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \delta} \frac{1}{\sqrt{q^2 + (2nD \pm \delta)^2}} \right\},$$

$$(14.) \quad \varepsilon'' = - \frac{m}{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \delta} \frac{1}{\sqrt{q^2 + ([2n - 1]D \pm \delta)^2}} \right\},$$

wo das doppelte Zeichen \pm andenten soll, dass *alle* Glieder der Summe einzuverleiben sind, sowohl die für das *obere*, als auch die für das *untere* Zeichen sich ergebenden.

Hiermit sind die gesuchten Dichtigkeiten ε' und ε'' berechnet. Es sei noch hinzugefügt, dass in den Formeln (13.), (14.) die Differentiation $\frac{\partial}{\partial \delta}$ nicht ohne Weiteres vor das Summenzeichen gesetzt werden darf. Denn sonst würde z. B. in (13.) ein Ausdruck auftreten von der Form:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q^2 + (2nD \pm \delta)^2}} \right];$$

und hier würde die in der eckigen Klammer enthaltene Reihe, wie leicht zu erkennen, *divergent* sein.

Elftes Capitel.

Die charakteristische Function für die Aufgaben des stationären elektrischen Strömungszustandes.

Während die im vorhergehenden Capitel besprochene charakteristische Function von *Green* herrührt, dürfte die *hier* zu erörternde charakteristische Function wohl zuerst von *F. Neumann* eingeführt sein. Ebenso wie jene *Green'sche* Function auf *ruhende* Elektricität Bezug hat, in ähnlicher Weise bezieht sich diese *F. Neumann'sche* Function auf *strömende* Elektricität*).

Bevor wir die betreffende Theorie darlegen, wird es zweckmässig sein, zuvörderst Einiges voranzuschicken über die Definition und die Ursachen der elektromotorischen Kräfte, sowie über die allgemeinen Gleichungen, welche man für die Bewegung der Elektricität in einem Conductor als maassgebend ansieht.

§ 1.

Definition der elektromotorischen Kraft.

Die in einem Conductor enthaltene elektrische Materie wird bekanntlich unter Umständen in *Bewegung* oder *Strömung* begriffen sein. Dieses Phänomen schreibt man gewissen *Kräften* zu, die innerhalb des Conductors an allen Stellen in Wirksamkeit sind. Als die *Richtung* einer solchen Kraft pflegt man an irgend einer Stelle des Conductors die Richtung der daselbst vorhandenen Strömung anzusehen. Gleichzeitig pflegt man die *Stärke* der Kraft nach der grössern oder geringern Elektricitätsmenge zu beurtheilen, welche an der betrachteten Stelle durch ein gegen die Strömung senkrechtcs Flächenelement während einer gegebenen Zeit hindurchfliesst.

Die in Rede stehenden Kräfte werden *elektromotorische Kräfte* genannt. Und die betreffenden Definitionen lauten, falls man die *Leitungs-*

*) Ausser diesen beiden charakteristischen Functionen ist übrigens noch eine *dritte* zu nennen, die ebenfalls von *F. Neumann* herrührt, und die sich bezieht auf die Aufgaben der *magnetischen Induction*. Vgl. darüber *F. Neumann's* Vorl. über die Theorie des Magnetismus, Leipzig, bei Teubner, 1881; daselbst pg. 110.

fähigkeit desjenigen Metalles, aus welchem der Conductor besteht, mit κ bezeichnet, folgendermassen:

Definitionen. — Construiert man an irgend einer Stelle des Conductors ein Flächenelement do , dessen Normale n zusammenfällt mit der Richtung der dort vorhandenen elektrischen Strömung, und bezeichnet man die durch do während der Zeit dt hindurchfliessende Elektricitätsmenge mit

$$(1.) \quad \kappa R do dt,$$

so pflegt man dieses Hindurchströmen der Elektricität durch das Element do einer daselbst thätigen elektromotorischen Kraft zuzuschreiben, und dabei R als die Grösse, und n als die Richtung dieser Kraft anzusehen.

Die Formel (1.) bezieht sich zunächst nur auf ein Element do , welches gegen die Strömung senkrecht steht, ist aber leicht übertragbar auf solche Elemente $d\omega$, die schief gegen die Strömung liegen. Zu diesem Zwecke construirt man die durch die einzelnen Punkte von do gehenden Strömungskurven, welche in unmittelbarer Nähe von do als lauter parallele und zu do senkrechte Linien anzusehen sind, und welche daher in ihrer Gesamtheit einen Cylinder repräsentiren, der das Element do zum senkrechten Querschnitt hat. Legt man nun durch diesen Cylinder irgend einen schiefen Querschnitt $d\omega$, mit der Normale v , so wird offenbar während der Zeit dt durch $d\omega$ ebenso viel Elektricität hindurchfliessen, wie durch do . Demgemäss wird also die während der Zeit dt durch $d\omega$ hindurchgehende Elektricitätsmenge den in (1.) angegebenen Werth:

$$\kappa R do dt$$

besitzen. Dieser Werth kann aber, weil do die senkrechte Projection von $d\omega$ ist, auch so geschrieben werden:

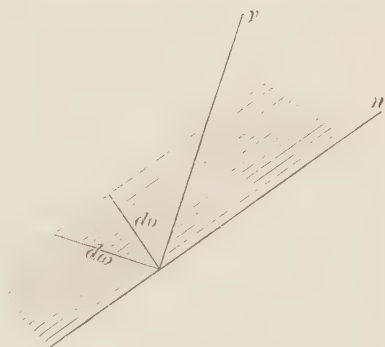
$$\kappa R d\omega \cos (v, n) dt,$$

oder auch so:

$$\kappa R_v d\omega dt,$$

wo alsdann $R_v = R \cos (n, v)$ die Componente jener die Richtung n besitzenden elektromotorischen Kraft R nach der Richtung v vorstellt. Demgemäss ergibt sich folgender

Satz. — Bezeichnet R die an irgend einer Stelle des Conductors vorhandene elektromotorische Kraft, und construirt man an dieser Stelle ein beliebiges Flächenelement $d\omega$ mit der Normale v , so wird die durch



dieses Element $d\omega$ während der Zeit dt hindurchfliessende Elektrizitätsmenge den Werth haben:

$$(2.) \quad \kappa R_v d\omega dt,$$

wo R_v die Componente von R nach v vorstellt, während κ die Leitungsfähigkeit bezeichnet.

Zusatz. — Genauer ausgedrückt, wird zu sagen sein: die Elektrizitätsmenge (2.) sei diejenige, welche während der Zeit dt von der v_0 -Seite des Elementes $d\omega$ zur v -Seite desselben übergeht. Dabei ist unter v_0 die zu v entgegengesetzte Normale zu verstehen.

Es mögen noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden über die Richtung und Stärke der elektrischen Strömung. Unter der *Stärke* j der elektrischen Strömung versteht man diejenige Elektrizitätsmenge, welche durch ein zur Strömung *senkrecht*es Flächenelement von der Grösse *Eins* während der Zeit *Eins* hindurchgeht. Somit folgt aus (1.):

$$(3.) \quad j = \kappa R.$$

Andererseits ist die *Richtung* der elektrischen Strömung, zufolge unserer Definitionen (pg. 263), identisch mit der Richtung der einwirkenden elektromotorischen Kraft R . Bezeichnet man also die Winkel, unter denen die elektrische Strömung j gegen die Coordinatenaxen geneigt ist, mit α , β , γ , und die Componenten der Kraft R nach diesen Axen mit R_x , R_y , R_z , so ist:

$$(4.) \quad \cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Auch pflegt man von den *Componenten* der elektrischen Strömung zu sprechen, und darunter die Producte $j \cos \alpha$, $j \cos \beta$, $j \cos \gamma$ zu verstehen. Bezeichnet man also diese Strömungscomponenten mit u , v , w , so ist:

$$(5.) \quad u = j \cos \alpha, \quad v = j \cos \beta, \quad w = j \cos \gamma,$$

also nach (3.), (4.):

$$(6.) \quad u = \kappa R_x, \quad v = \kappa R_y, \quad w = \kappa R_z.$$

§ 2.

Ueber den stationären Zustand der elektrischen Strömung.

Es sei $\varepsilon dx dy dz$ die zur Zeit t im Parallelepipedum $dx dy dz$ enthaltene Elektrizitätsmenge, mithin

$$(\alpha.) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dx dy dz dt$$

der Zuwachs dieser Elektrizitätsmenge während der Zeit dt . Dieser Zuwachs wird offenbar gleich sein der Summe derjenigen Elektrizitäts-

mengen, welche während der Zeit dt in das Parallelepipedum hineingeflossen sind, davon abgezogen die Summe der während dieser Zeit dt aus dem Parallelepipedum herausgetretenen Elektrizitätsmengen. Demgemäss kann der in Rede stehende Zuwachs folgendermassen berechnet werden.

Die x -Axe sei (der bequemerer Ausdrucksweise willen) *vertical nach Oben* gerichtet. Alsdann besitzen die durch die beiden horizontalen Seitenflächen $dydz$ des Parallelepipedums während der Zeit dt von Unten nach Oben hindurchfliessenden Elektrizitätsmengen, zufolge (2.), die Werthe:

$$\kappa R_x dydzdt \quad \text{und} \quad \kappa \left(R_x + \frac{\partial R_x}{\partial x} dx \right) dydzdt;$$

woraus für das Parallelepipedum ein *Gewinn* an Elektrizität resultirt vom Betrage:

$$- \kappa \frac{\partial R_x}{\partial x} dx dydzdt.$$

Berücksichtigt man also sämtliche *sechs* Seitenflächen des Parallelepipedums, d. h. alle durch diese sechs Flächen stattfindenden Strömungen, so wird der *im Ganzen* für das Parallelepipedum resultirende Gewinn an Elektrizität den Werth haben:

$$(\beta.) \quad - \kappa \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) dx dydzdt.$$

Und dieser Gewinn ($\beta.$) kann offenbar nichts Anderes sein als der in ($\alpha.$) genannte Zuwachs. Somit folgt:

$$(\gamma.) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - \kappa \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right).$$

Für den hier zu betrachtenden *stationären Zustand* ist aber ε unabhängig von der Zeit; so dass in diesem Falle die Gleichung ($\gamma.$) übergeht in:

$$(7.) \quad 0 = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}.$$

Ist der Conductor zusammengesetzt aus verschiedenen Metallen, und bezeichnet $d\omega$ ein Element derjenigen Fläche, in welcher zwei solche Metalle zusammengrenzen, so muss für die während der Zeit dt durch $d\omega$ hindurchfliessende Elektrizitätsmenge auf Grund der Formel (2.) ein und derselbe Werth sich ergeben, einerlei, ob man das Element $d\omega$ zum *einen* oder zum *andern* Metalle rechnet. Demgemäss erhält man die Formel:

$$(8.) \quad \kappa R_v = \kappa' R'_v,$$

wo ν die Normale von $d\omega$, d. i. die Normale jener Grenzfläche vorstellt, und wo κ' , R' für das zweite Metall dieselben Bedeutungen haben sollen, welche κ , R für das erste besitzen. Dabei ist die Normale ν auf beiden Seiten der Formel (8.) von *einerlei* Richtung zu denken, gleichgültig von welcher.

Ist insbesondere $d\omega$ das Element einer *freien* Oberfläche, also einer Fläche, in welcher der Conductor an Luft oder überhaupt an einen Isolator angrenzt, so wird $\kappa' = 0$,¹ und die Gleichung (8.) also übergehen in:

$$(9.) \quad R_\nu = 0.$$

Zu diesen Formeln (7.), (8.), (9.) können noch weitere Formeln hinzugefügt werden. So z. B. wird während des stationären Zustandes die Masse der in dem ganzen Conductor enthaltenen Elektricität fort-dauernd ein und denselben Werth behalten. Mit andern Worten: Die durch die einzelnen Oberflächenelemente $d\omega$ des Conductors aus demselben heraustretenden Elektricitätsmengen werden zusammengenommen $= 0$ sein. Es wird also, nach (2.), die Gleichung stattfinden:

$$(10.) \quad \int \kappa R_\nu d\omega = 0,$$

wo ν die äussere Normale der Conductoroberfläche vorstellt, und die Integration ausgedehnt zu denken ist über alle Elemente $d\omega$ dieser Oberfläche.

Ist insbesondere der Conductor *homogen*, mithin κ überall dasselbe, so gewinnt die Formel (10.) die einfachere Gestalt:

$$(10a.) \quad \int R_\nu d\omega = 0.$$

§ 3.

Ueber die Ursachen der elektromotorischen Kraft.

Nach den üblichen Vorstellungen besteht die an irgend einer Stelle (x, y, z) des Conductors zur Zeit t vorhandene elektromotorische Kraft R im Allgemeinen aus *zwei Theilen* D und E , so dass man also, was die rechtwinkligen Componenten betrifft, die Formeln hat:

$$(11.) \quad \begin{aligned} R_x &= D_x + E_x, \\ R_y &= D_y + E_y, \\ R_z &= D_z + E_z. \end{aligned}$$

Der Theil D rührt her von der sogenannten *Spannung der elektrischen Materie*, und der Theil E von *anderweitigen Ursachen*, z. B. von den Orts- oder Intensitäts-Veränderungen irgend welcher in der Nähe des Conductors befindlicher galvanischer Ströme.

Ueber die sogenannte *Spannung* der Elektricität hat man zu verschiedenen Zeiten verschiedene Vorstellungen sich gebildet*). Für unsere Zwecke wird es ausreichend sein, zu bemerken, dass die Spannung eine *unbekannte Function* von x, y, z, t , oder, falls man auf den stationären Zustand sich beschränkt, eine *unbekannte Function* von x, y, z ist, und dass diese Spannung bei den elektrischen Bewegungen eine ähnliche Rolle spielt, wie die Temperatur bei der Wärmebewegung. Ebenso nämlich, wie die Wärme von den Orten höherer Temperatur zu denen geringerer Temperatur abfließt, ebenso schreibt man der elektrischen Materie das Bestreben zu, von den Orten höherer Spannung zu denen geringerer Spannung hinzuströmen. Und demgemäss pflegt man anzunehmen, dass in jedem Punkte (x, y, z) durch die in seiner Umgebung vorhandenen Spannungsunterschiede eine *elektromotorische Kraft* D erzeugt wird, deren Componenten D_x, D_y, D_z identisch sind mit $-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}$, wo V selber die *Spannung* vorstellt. Diese Werthe substituirt, erhalten die Formeln (11.) die Gestalt:

$$(12.) \quad \begin{aligned} R_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} + E_x, \\ R_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} + E_y, \\ R_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} + E_z. \end{aligned}$$

§ 4.

Die zu behandelnde Aufgabe.

Wir wollen jetzt annehmen, dass der gegebene Conductor *homogen* sei, dass derselbe im *stationären* Strömungszustande sich befinde, und dass die vorhandenen elektromotorischen Kräfte *lediglich* von der *Spannung* herrühren, dass mithin die E_x, E_y, E_z gleich Null seien. Alsdann reduciren sich die Formeln (12.) auf

$$(\alpha.) \quad R_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad R_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad R_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus (3.) und (6.):

$$(\beta.) \quad j = \kappa R = \kappa \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2},$$

*) Vgl. F. Neumann's Vorl. über elektrische Ströme, herausgegeben von VonderMühl, Leipzig, 1884; daselbst pg. 45.

und:

$$(\gamma.) \quad u = -\kappa \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = -\kappa \frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = -\kappa \frac{\partial V}{\partial z};$$

woraus z. B. folgt, dass die *Strömungscurren* identisch sind mit den *rechtwinkligen Trajectorien* der durch die Gleichung $V = \text{Const.}$ dargestellten *Flächen constanter Spannung*.

Ferner gewinnt die Formel (2.) mit Rücksicht auf (α .) die Gestalt:

$$(\delta.) \quad -\kappa \frac{dV}{dv} d\omega dt;$$

und es wird also dieser Ausdruck diejenige Elektrizitätsmenge vorstellen, welche durch irgend ein Flächenelement $d\omega$ mit der Normale ν , von der ν_0 -Seite zur ν -Seite, während der Zeit dt hindurchfließt. Summirt man diesen Ausdruck über alle Elemente dt einer *Zeiteinheit*, und berücksichtigt man dabei, dass bei dem hier betrachteten *stationären* Zustande V , mithin auch $\frac{dV}{dv}$ von der Zeit unabhängig ist, so erhält man:

$$(\varepsilon.) \quad -\kappa \frac{dV}{dv} d\omega.$$

Und es wird also dieser letztere Ausdruck diejenige Elektrizitätsmenge repräsentiren, welche durch $d\omega$, von der ν_0 -Seite zur ν -Seite, während der *Zeiteinheit* hindurchgeht. — Endlich wird die Gleichung (10a.), mit Rücksicht auf (α .), die Gestalt annehmen:

$$(\xi.) \quad \int \frac{dV}{dv} d\omega = 0,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\omega$ der Conductoroberfläche Ω .

Was die Bestimmung der *Spannung* d. i. der unbekannten Function $V = V(x, y, z)$ betrifft, so ergeben sich für jedweden Punkt (x, y, z) innerhalb des Conductors die Formeln:

$$(\eta.) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad \text{d. i.} \quad \Delta V = 0,$$

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{stetig.}$$

Die erste dieser Formeln entsteht nämlich aus (7.), falls man daselbst für R_x, R_y, R_z die Werthe (α .) einsetzt. Ferner ergiebt sich die Stetigkeit von $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ aus (γ .), falls man nur beachtet, dass die Strömungscomponenten u, v, w zur Zeit des stationären Zustandes nicht gut umhin können, stetige Functionen der Coordinaten zu sein. Und aus dieser Stetigkeit von $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ folgt sodann aber auch

die Stetigkeit von V selber, falls man nur voraussetzt, dass der vom Conductor occupirte Raum ein *einfach zusammenhängender* ist*).

Was die *Oberfläche* Ω des gegebenen Conductors betrifft, so wollen wir uns vorstellen, der Conductor sei theils mit Luft, theils aber auch mit *andern* Conductoren in Berührung, dabei aber annehmen, es sei bekannt, *wieviel* Elektricität durch jedwedes Element $d\omega$ der Fläche Ω während der Zeiteinheit aus dem Conductor *hinausfliesst*. Mit andern Worten: Wir wollen annehmen, für jedwedes Element $d\omega$ der Conductoroberfläche sei die in $(\epsilon.)$ genannte Quantität *gegeben*; es sei also:

$$(\vartheta.) \quad -\kappa \frac{dV}{dv} d\omega = f d\omega,$$

wo f eine *gegebene Function des Ortes auf der Conductoroberfläche* Ω vorstellt, während v die *äussere Normale* von Ω repräsentirt. Man kann dieses $f d\omega$ etwa bezeichnen als die Grösse des durch $d\omega$ von Innen nach Aussen gehenden Stromes.

Uebrigens werden diese Oberflächendurchströmungen $f d\omega$ nicht ganz *ad libitum* gegeben sein dürfen. Denn aus $(\vartheta.)$ folgt durch Integration über die Oberfläche:

$$-\kappa \int \frac{dV}{dv} d\omega = \int f d\omega,$$

also mit Rücksicht auf $(\xi.)$:

$$(\kappa.) \quad \int f d\omega = 0.$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, *die in dem Conductor vorhandene elektrische Spannung* $V = V(x, y, z)$ *auf Grund der Formeln* $(\eta.)$, $(\vartheta.)$ *wirklich zu berechnen, falls die Function* f *in beliebiger, aber mit* $(\kappa.)$ *in Einklang stehender Weise gegeben ist*. Dabei springt von selber ins Auge, dass V , auf Grund jener Formeln $(\eta.)$, $(\vartheta.)$, immer nur bis auf eine additive Constante bestimmbar ist. Mehr aber ist für unsere Zwecke auch nicht erforderlich. Denn haben wir den Werth von V bis auf eine unbekannte additive Constante ermittelt, so ergeben sich alsdann, mittelst der Formeln $(\gamma.)$, *vollständig bestimmte* Werthe für die Strömungscomponenten u, v, w . Und die Berechnung der Strömungscomponenten ist doch schliesslich unser eigentliches Ziel.

*) Vgl. z. B. *C. Neumann*: Hydrodynamische Untersuchungen. Leipzig, bei Teubner. 1883; daselbst pg. 22.

§ 5.

Reduction der gestellten Aufgabe auf die Berechnung einer gewissen charakteristischen Function.

Den Bedingungen (η .) geschieht offenbar Genüge, wenn man für V das Potential irgendwelcher Massen M nimmt, die *ausserhalb* des Conductors liegen. Demgemäss wird die in Rede stehende Aufgabe gelöst sein, sobald es gelingen sollte, folgendes Problem zu lösen.

Allgemeines Problem. — *Man denke sich ausserhalb einer gegebenen geschlossenen Fläche Ω irgend welche unbekannte Massen M ausgebreitet, und das Potential derselben auf Punkte i innerhalb Ω mit V_i bezeichnet.*

Der nach der äussern Normale v der Fläche Ω gebildete Differential quotient $\frac{dV_i}{dv}$ ist auf Ω überall gegeben, mittelst der Gleichung:

$$(1.) \quad -\kappa \frac{dV_i}{dv} = f.$$

Es repräsentirt nämlich hier κ eine gegebene Constante, und f eine gegebene, der Bedingung $\int f d\omega = 0$ entsprechende Function) des Ortes auf Ω . — Es handelt sich darum, das Potential V_i , unter so bekannten Umständen, für den ganzen Innenraum von Ω zu berechnen bis auf eine additive Constante.*

Bemerkung. — Durch die in dem Problem an V gestellten Anforderungen ist diese Function V vollständig bestimmt, bis auf eine additive Constante. Solches ergibt sich leicht mittelst des Satzes (N.) pg. 205, indem man dabei einen ähnlichen Weg einschlägt, wie früher in der Bemerkung pg. 236.

Zur Inangriffnahme des allgemeinen Problems (1.) markiren wir nun irgendwo *innerhalb* Ω einen Massenpunkt $m(a, b, c)$, und setzen:

$$(2.) \quad U = U^{(m)} + U^{(M')} = \frac{m}{R} + U^{(M')},$$

wo $U^{(m)} = \frac{m}{R}$ das Potential von m , und $U^{(M')}$ das Potential irgend welcher *ausserhalb* Ω gelegener Massen M' vorstellen soll, beide Potentiale bezogen gedacht auf einen beliebigen Punkt (x, y, z) . Dabei aber wollen wir jene Massen M' in solcher Weise uns ausgesucht denken, dass U an allen Stellen der Fläche Ω der Bedingung entspricht:

*) Die Bedingung $\int f d\omega = 0$ hat sich im Vorhergehenden ergeben aus der Natur der gestellten physikalischen Aufgabe. Doch sei noch bemerkt, dass die Formel (1.) *direct* diese Bedingung erheischt, wie sich solches sofort ergibt, falls man auf das Potential V_i [dessen Massen M *ausserhalb* Ω liegen sollen] den Satz (D.) pg. 202 anwendet.

$$(3.) \quad \frac{dU_i}{dv} = K,$$

wo v die äussere Normale von Ω , und K eine *Constante* sein soll. Multiplicirt man mit $d\omega$, und integrirt sodann über alle Elemente $d\omega$ der Fläche Ω , so erhält man:

$$K \int d\omega = \int \frac{dU_i}{dv} d\omega,$$

oder, falls man für U den Werth (2.) substituirt:

$$K\Omega = \int \frac{dU_i^{(m)}}{dv} d\omega + \int \frac{dU_i^{(M')}}{dv} d\omega,$$

oder, mit Rücksicht auf den Satz (D.) pg. 202:

$$K\Omega = -4\pi m + 0,$$

d. i.

$$(4.) \quad K = -\frac{4\pi m}{\Omega},$$

wo Ω das *Areal* der gegebenen Fläche Ω vorstellt. Die der Function U auferlegte Bedingung (2.) bringt also *ea ipsa* mit sich, dass die Constante K keine beliebige ist, sondern den in (4.) angegebenen ganz bestimmten Werth besitzt.

Dies vorangeschickt, wollen wir jetzt übergehen zum eigentlichen Kern unserer Betrachtung, nämlich zeigen, dass zwischen der *gesuchten Function* V und zwischen der soeben eingeführten *auxiliären Function* U ein enger Zusammenhang stattfindet. Dabei wollen wir [ähnlich wie früher pg. 221] die Masse $m(a, b, c)$ als eine *äusserst kleine homogene Kugel* vom Centrum (a, b, c) uns vorstellen. Alsdann subordiniren sich die Potentiale U und V , ohne Weiteres der allgemeinen Formel (A.) pg. 198:

$$\iiint_{\text{über den Innenraum von } \Omega} (U\Delta V - V\Delta U) dx dy dz = \int \left(U_i \frac{dV_i}{dv} - V_i \frac{dU_i}{dv} \right) d\omega.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (2.), (3.):

$$\iiint_{\text{über den Innenraum von } \Omega} (U\Delta V - V\Delta U^{(m)} - V\Delta U^{(M')}) dx dy dz = \int U_i \frac{dV_i}{dv} d\omega - K \int V_i d\omega,$$

oder, weil V und $U^{(M')}$ innerhalb Ω überall den Gleichungen $\Delta V = 0$ und $\Delta U^{(M')} = 0$ entsprechen:

$$- \iiint_{\text{über den Innenraum von } \Omega} V \Delta U^{(m)} dx dy dz = \int U_i \frac{dV_i}{dv} d\omega - K \int V_i d\omega.$$

Der hier auf der linken Seite stehende Ausdruck reducirt sich [mittelst der Betrachtung pg. 222] auf $4\pi m V(a, b, c)$. Somit folgt, unter Rücksichtnahme auf (4.):

$$4\pi m V(a, b, c) = \int U_i \cdot \frac{dV_i}{dv} d\omega + \frac{4\pi m}{\Omega} \int V_i d\omega,$$

also mit Rücksicht auf (1.):

$$(5.) \quad V(a, b, c) = - \frac{1}{4\pi m} \int U f d\omega + \text{Const.}$$

Die hier auftretende Constante ist $= \frac{1}{\Omega} \int V_i d\omega$, mithin unabhängig von (a, b, c) . Denn giebt man diesem Punkte (a, b, c) innerhalb Ω irgend welche andere Lage, so wird durch eine solche Lagenveränderung wohl der Werth von U , nicht aber der von V alterirt werden*).

Die Formel (5.) zeigt den gegenseitigen Zusammenhang zwischen V und U . Sie zeigt nämlich, dass man V in jedwedem Punkte (a, b, c) innerhalb Ω bis auf eine von (a, b, c) unabhängige Constante anzugeben im Stande sein wird, sobald die auxiliäre Function U gefunden ist. Setzen wir also jene Constante, die für unsere Zwecke gleichgültig ist [vgl. den Schluss von § 4 auf pg. 269], gleich Null, so gelangen wir zu folgendem Satze:

Reduction des allgemeinen Problems auf die charakteristische Function U . — Soll die Lösung V des allgemeinen Problems (1.) gefunden werden, so markire man irgendwo innerhalb Ω einen Massenpunkt $m(a, b, c)$, und setze:

$$(6.) \quad U = U^{(m)} + U^{(M')},$$

wo $U^{(m)}$ das Potential von m , und $U^{(M')}$ das Potential irgend welcher ausserhalb Ω liegender Massen M' sein soll. Sodann bestimme man diese Massen M' der Art, dass der Differentialquotient

$$(7.) \quad \frac{dU_i}{dv}$$

an allen Stellen der Fläche Ω ein und denselben Werth hat.

Alsdann wird jene gesuchte Function V im Punkte (a, b, c) den Werth haben:

$$(8.) \quad V(a, b, c) = - \frac{1}{4\pi m} \int U f d\omega.$$

wo f und x jene von Hause aus gegebenen, in (1.) erwähnten Grössen vorstellen.

Die Function U kann kurzweg die charakteristische Function des behandelten Problems genannt werden.

*) In der That ist ja V das in dem allgemeinen Problem [pg. 270] gesuchte Potential, mithin ohne alle Beziehung zu dem erst später eingeführten auxiliären Punkte $m(a, b, c)$.

§ 6.

Anwendung auf die Kugel.

Die Oberfläche Ω des gegebenen Conductors sei eine Kugelfläche vom Radius A . Da die Massen M' *ausserhalb* dieser Fläche Ω liegen sollen, so wird das von ihnen herrührende Potential $U^{(M')}$ für jedweden Punkt $i(\varrho, \mu, \varphi)$ *innerhalb* Ω darstellbar sein durch eine Reihe von folgender Form*):

$$(9.) \quad U_i^{(M')} = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n Y_n(\mu, \varphi),$$

wo Y_n eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung vorstellt. Bezeichnet man daher die Polarcordinaten des innerhalb Ω willkürlich markirten Massenpunktes $m(a, b, c)$ mit $(\varrho_m, \mu_m, \varphi_m)$, so erhält man für das Potential

$$(10.) \quad U_i = U_i^{(m)} + U_i^{(M')}$$

die Darstellung:

$$(11.) \quad U_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left[m \frac{\varrho_m^n}{\varrho^{n+1}} P_n(\cos \gamma) + \varrho^n Y_n(\mu, \varphi) \right],$$

wo γ die gegenseitige Neigung zwischen (μ, φ) und (μ_m, φ_m) vorstellt. Dabei ist vorausgesetzt, der variable Punkt $i(\varrho, \mu, \varphi)$ liege der Kugelfläche Ω *sehr nahe*, der Art, dass $\varrho > \varrho_m$ ist. Die in (11.) enthaltenen Y 's sind nun gemäss der Bedingung (7.) zu bestimmen, also der Art zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[-m(n+1) \frac{\varrho_m^n}{\varrho^{n+2}} P_n(\cos \gamma) + n \varrho^{n-1} Y_n(\mu, \varphi) \right]$$

für solche Punkte (ϱ, μ, φ) , die *auf* Ω liegen, für die also $\varrho = A$ ist, durchweg *ein und denselben* Werth hat. Mit andern Worten: Jene Y 's sind der Art zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[-m(n+1) \frac{\varrho_m^n}{A^{n+2}} P_n(\cos \gamma) + n A^{n-1} Y_n(\mu, \varphi) \right]$$

von (μ, φ) *unabhängig* ist. Hieraus schliesst man in bekannter Weise**), dass $Y_n(\mu, \varphi)$ für $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ den Werth haben muss:

$$(12.) \quad Y_n(\mu, \varphi) = \frac{m(n+1)}{n} \frac{\varrho_m^n}{A^{2n+1}} P_n(\cos \gamma),$$

während Y_0 *unbestimmt* bleibt. Substituirt man jetzt diesen Werth (12.) in (9.), und den so für $U_i^{(M')}$ resultirenden Werth in (10.), so erhält man:

*) Man vgl. z. B. die Betrachtungen auf pg. 62–65.

**) Nämlich mittelst der Zusätze pg. 60.

$$(13.) \quad U_i = U_i^{(m)} + Y_0 + m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{(\varrho \varrho_m)^n}{A^{2n+1}} P_n(\cos \gamma);$$

und dieses U_i wird also allen gestellten Anforderungen entsprechen, welchen Werth man dabei der von (u, φ) unabhängigen Grösse Y_0 auch zuertheilen mag.

Hiermit ist die Berechnung von U für die Kugel vollendet. Es bleibt nur noch übrig, die unendliche Reihe (13.) zu summiren. Zu diesem Zwecke mag jener willkürlichen von (u, φ) unabhängigen Grösse Y_0 der Werth $\frac{m(1 + \log \varrho_m)}{A}$ zuertheilt werden. Alsdann ergibt sich:

$$U_i - U_i^{(m)} = m \left\{ \frac{1 + \log \varrho_m}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{(\varrho \varrho_m)^n}{A^{2n+1}} P_n(\cos \gamma) \right\},$$

oder, falls man den variablen Punkt $i(\varrho, u, \varphi)$ nach der Kugelfläche Ω hinwandern, mithin ϱ in A übergehen lässt:

$$(14.) \quad \overline{U_i} - \frac{m}{R} = m \left\{ \frac{1 + \log \varrho_m}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{\varrho_m^n}{A^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right\},$$

wo R den Abstand des Oberflächenpunktes (A, u, φ) vom Punkte $m(\varrho_m, u_m, \varphi_m)$ bezeichnet, während γ , nach wie vor, die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen (u, φ) und (u_m, φ_m) vorstellt. Demgemäss ist z. B.:

$$(15.) \quad \frac{m}{R} = m \left\{ \frac{1}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_m^n}{A^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right\},$$

und

$$(15a.) \quad R = \sqrt{A^2 + \varrho_m^2 - 2A\varrho_m \cos \gamma}.$$

Aus (14.), (15.) folgt durch Subtraction:

$$(16.) \quad \Phi = \overline{U_i} - \frac{2m}{R} = m \left\{ \frac{\log \varrho_m}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\varrho_m^n}{A^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right\},$$

wo Φ nur als Abbreviatur dienen soll für die linke Seite.

Beachtet man nun die aus (16.) durch Differentiation nach ϱ_m entspringende Formel:

$$\varrho_m \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_m} = m \left\{ \frac{1}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_m^n}{A^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right\},$$

so ergibt sich aus (15.) sofort:

$$\varrho_m \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_m} = \frac{m}{R},$$

also nach (15a.):

$$\varrho_m \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_m} = \frac{m}{\sqrt{A^2 + \varrho_m^2 - 2A\varrho_m \cos \gamma}}.$$

Demgemäss erhält man:

$$\Phi = m \int \frac{\partial e_m}{e_m \sqrt{A^2 + e_m^2 - 2Ae_m \cos \gamma}},$$

oder, falls man die Integration wirklich ausführt:

$$\Phi = -\frac{m}{A} \log \frac{\sqrt{A^2 + e_m^2 - 2Ae_m \cos \gamma} + (A - e_m \cos \gamma)}{e_m},$$

oder, falls man für Φ seine eigentliche Bedeutung (16.) substituirt, und zugleich Rücksicht nimmt auf (15a.):

$$(17.) \quad \bar{U}_i = \frac{2m}{R} - \frac{m}{A} \log \frac{R + (A - e_m \cos \gamma)}{e_m}.$$

Substituirt man schliesslich diesen Werth von U in (8.), so ergibt sich:

$$(18.) \quad V(a, b, c) = -\frac{1}{4\pi\kappa} \int \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{A} \log \frac{R + (A - e_m \cos \gamma)}{e_m} \right) f d\omega;$$

so dass wir also, falls wir zur Abkürzung r für e_m setzen, zu folgendem Resultate gelangen:

Ueber den stationären elektrischen Strömungszustand einer Kugel. Die in einer homogenen Metallkugel enthaltene Elektrizität befinde sich im stationären Strömungszustande, und zwar unter der Einwirkung elektromotorischer Kräfte, die lediglich von der Spannung der Elektrizität herrühren. Ueberdies sei für jedes Oberflächen-element $d\omega$ der Kugel diejenige Elektrizitätsmenge $f d\omega$ gegeben, welche durch dasselbe in der Zeiteinheit aus der Kugel hinausströmt.

Alsdann wird die elektrische Spannung innerhalb der Kugel in jedem Punkte (a, b, c) ohne Weiteres angebar, nämlich von folgendem Werthe sein:

$$(19.) \quad V(a, b, c) = -\frac{1}{4\pi\kappa} \int \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{A} \log \frac{R + A - r \cos \gamma}{r} \right) f d\omega,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\omega$ der Kugeloberfläche. Dabei bezeichnet κ die Leitungsfähigkeit der Kugel, A ihren Radius, ferner r den Centralabstand des Punktes (a, b, c) , ferner γ den Winkel, unter welchem der nach $d\omega$ hinlaufende Kugelradius gegen r geneigt ist, endlich R den Abstand des Elementes $d\omega$ vom Punkte (a, b, c) .

Aus (19.) ergeben sich alsdann durch Differentiation nach a, b, c die an der Stelle (a, b, c) vorhandenen Strömungscomponenten u, v, w . In der That werden diese Componenten die Werthe haben:

$$(20.) \quad u = -\kappa \frac{\partial V(a, b, c)}{\partial a}, \quad v = -\kappa \frac{\partial V(a, b, c)}{\partial b}, \quad w = -\kappa \frac{\partial V(a, b, c)}{\partial c};$$

wie solches aus den Formeln (γ .) pg. 268 sofort folgt. Demgemäss sind z. B. die Strömungscurven nichts Anderes als die senkrechten Trajectorien der Flächen constanter Spannung.

Das erhaltene Resultat ist z. B. leicht anwendbar auf den Fall, dass die Metallkugel in die Schliessung einer Galvani'schen Batterie eingeschaltet, sonst aber überall mit Luft in Berührung ist. Die Stelle, an welcher der Strom der Batterie in die Kugel *eintritt*, mag β , und die Stelle, wo er *austritt*, α heissen. Ferner sei $d\omega_\beta$ der in β mit der Kugel in Berührung stehende Querschnitt des Zuleitungsdrahtes, und $d\omega_\alpha$ der Querschnitt des in α angesetzten Ableitungsdrahtes. Dann ist die Elektricitätsmenge $f d\omega$ für jedes Element $d\omega$ der Kugeloberfläche = 0, mit alleiniger Ausnahme der Elemente $d\omega_\beta$ und $d\omega_\alpha$. Für diese nämlich gelten die Formeln:

$$(21.) \quad f_\beta d\omega_\beta = -J \quad \text{und} \quad f_\alpha d\omega_\alpha = +J,$$

wo J die Stärke des Stromes in jenen beiden Drähten repräsentirt. Demgemäss reducirt sich die Formel (19.) im gegenwärtigen Falle auf:

$$(22.) \quad V(a, b, c) = \frac{J}{4\pi\kappa} \left(\frac{2}{R_\beta} - \frac{2}{R_\alpha} - \frac{1}{A} \log \frac{R_\beta + A - r \cos \gamma_\beta}{R_\alpha + A - r \cos \gamma_\alpha} \right).$$

Dabei bezeichnet A wieder den Kugelradius, und r den Centralabstand des Punktes (a, b, c) . Ferner repräsentirt γ_α den Winkel, unter welchem der nach α laufende Kugelradius gegen r geneigt ist, und R_α den Abstand des Punktes α vom Punkte (a, b, c) . Endlich haben γ_β und R_β analoge Bedeutungen in Bezug auf den Punkt β .

Ist insbesondere der Kugelradius A *unendlich gross*, so reducirt sich die Formel (22.) auf:

$$(23.) \quad V(a, b, c) = \frac{J}{4\pi\kappa} \left(\frac{2}{R_\beta} - \frac{2}{R_\alpha} \right).$$

Zwölftes Capitel.

Die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln.

Es handelt sich um die Ermittlung derjenigen elektrischen Belegungen, welche auf zwei isolirten Metallkugeln entstehen werden, sobald dieselben mit irgend welchen Elektricitätsmengen geladen sind, unter der Voraussetzung, dass von Aussen her keinerlei Kräfte auf die beiden Kugeln einwirken. Dieses Problem ist zuerst von *Poisson* gelöst worden in seiner schon früher (pg. 155) erwähnten Abhandlung: *Sur la Distribution de l'Électricité à la surface des Corps conducteurs, 1812 et 1813.*

Sind U und V die unbekannten Potentiale jener beiden unbekannten Belegungen, so ergeben sich, wie *Poisson* gezeigt hat, zur Bestimmung von U und V zwei sogenannte *Functionalgleichungen*. Und hieraus ergibt sich, falls man V eliminirt, eine *Functionalgleichung*, in der nur noch U allein vorkommt, und durch deren Auflösung man zur wirklichen Kenntniss von U gelangen kann; womit alsdann der eigentliche Kern des Problems absolvirt sein wird. Denn dass man in analoger Weise auch V berechnen, und schliesslich, auf Grund der Potentiale U und V , auch zur Kenntniss der *Dichtigkeiten* jener beiden Belegungen gelangen kann, bedarf kaum noch der weiteren Ausführung.

Bei den Untersuchungen des gegenwärtigen Capitels werden wir im Allgemeinen den *Poisson'schen* Weg verfolgen, denselben jedoch verlassen bei Behandlung der schon erwähnten *Functionalgleichung*. Während nämlich bei *Poisson* zur Auflösung dieser Gleichung mehr oder weniger künstliche Mittel, resp. eine gewisse Kenntniss der allgemeinen Theorie derartiger Gleichungen erforderlich sind, werden wir unsererseits die Auflösung der Gleichung direct aus der unmittelbaren Natur des eigentlichen Problems schöpfen. Es sei darüber Folgendes bemerkt:

Gleich zu Anfang werden wir zeigen, dass das Potential U von solcher Beschaffenheit ist, als rührte es her von gewissen auf der Centrallinie der beiden Kugeln gelegenen Massenpunkten. Solches erkannt,

erhalten wir für U einen *bestimmten analytischen Ausdruck*, zu dessen vollständiger Fertigstellung nur noch die Bestimmung der in ihm enthaltenen unbekannten Constanten erforderlich ist.

Sodann erst werden wir übergehen zur Aufstellung der für U geltenden *Functionalgleichung*. Und die Auflösung dieser Gleichung wird alsdann eine überaus einfache sein, nämlich darin bestehen, dass wir in diese Gleichung für U den soeben erwähnten analytischen Ausdruck substituiren, und die unbekannten Constanten des Ausdrucks so bestimmen, wie diese Gleichung es verlangt. U. s. w.*)

Um Missverständnissen vorzubeugen, mag noch bemerkt sein, dass die Buchstaben A und B mit Bezug auf die erste und zweite Kugel in *drei* verschiedenen Bedeutungen gebraucht werden sollen, — was übrigens im Ganzen nur zur Vereinfachung und Erleichterung der Ausdrucksweise beitragen dürfte. Es soll nämlich unter A bald die *Oberfläche* der ersten Kugel, bald die auf dieser Oberfläche vorhandene *elektrische Belegung*, bald auch die *Gesamtmasse* dieser Belegung verstanden werden. Und Analoges ist von B mit Bezug auf die zweite Kugel zu sagen.

§ 1.

Allgemeine Sätze über das Potential einer Kugelflächenbelegung auf äussere und innere Punkte.

Denkt man sich eine Kugelfläche vom Radius A in beliebiger jedoch stetiger Weise mit Masse belegt, und die Dichtigkeit ε dieser Belegung nach Kugelfunctionen entwickelt [Satz (19.) pg. 55]:

$$(1.) \quad \varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \varphi),$$

*) Das gegenwärtige Capitel reproducirt, wie noch besonders erwähnt sein mag, die *F. Neumann'sche* Vorlesung vom Wintersemester 1856/57. Nach ganz anderen Methoden ist später das in Rede stehende Problem, unter Einführung der dipolaren Coordinaten, von *C. Neumann* behandelt worden in seiner Schrift über den stationären Temperaturzustand, Halle bei Schmidt, 1862. Von den beiden dort angegebenen Methoden — sie werden die *geometrische* und die *analytische* Methode genannt — dürfte namentlich die *letztere* durch besondere Kürze und Einfachheit sich auszeichnen. Dieselbe ist vom Verfasser jener Schrift, nach Abscheidung von mancherlei Ueberflüssigem, von Neuem reproducirt worden in seinen hydrodynamischen Untersuchungen, Leipzig bei Teubner, 1883, daselbst pg. 263 — 271. Diese *C. Neumann'sche* Methode ist übrigens auch dann anwendbar, wenn auf die beiden Kugeln von Aussen her *gegebene Kräfte* einwirken, was bei der *Poisson'schen* Methode *nicht* der Fall ist.

so erhält man [unter Anwendung der Integraleigenschaften der Ypsilon's p. 77] für die Gesamtmasse A dieser Belegung den Werth:

$$(2.) \quad A = \int \varepsilon d\omega = 4\pi A^2 Y_0.$$

Desgleichen erhält man für das Potential der Belegung in Bezug auf einen *äussern* Punkt $a(\varrho, \mu, \varphi)$ und in Bezug auf einen *innern* Punkt $i(\varrho, \mu, \varphi)$ die Werthe:

$$(3.) \quad \begin{aligned} U_a &= \frac{4\pi A^2}{\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{A}{\varrho}\right)^n Y_n(\mu, \varphi), \\ U_i &= 4\pi A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\varrho}{A}\right)^n Y_n(\mu, \varphi). \end{aligned}$$

Lässt man in diesen beiden letzten Gleichungen die sollicitirten Punkte (ϱ, μ, φ) auf die Kugelfläche fallen, also ϱ in den Kugelradius A übergehen, so folgt:

$$(4.) \quad \overline{U} = \overline{U}_a = \overline{U}_i = 4\pi A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} Y_n(\mu, \varphi),$$

wo \overline{U} (ohne Index) den gemeinschaftlichen Werth von \overline{U}_a und U_i vorstellen soll. Die so zu Tage getretene Gleichung

$$(4a.) \quad \overline{U}_a = \overline{U}_i$$

bietet übrigens nichts Neues dar, sondern dient nur zur Bestätigung des allgemeinen Satzes (12.) pg. 173.

Die beiden in (3.) unter den Summenzeichen stehenden Ausdrücke sind der Art beschaffen, dass der eine in den andern übergeht durch Vertauschung von ϱ mit $\frac{A^2}{\varrho}$; so dass man also zu folgenden Formeln gelangt:

$$(5.) \quad (U_a)_{\varrho} = \frac{A}{\varrho} (U_i)_{\frac{A^2}{\varrho}} \quad \text{und} \quad (U_i)_{\varrho} = \frac{A}{\varrho} (U_a)_{\frac{A^2}{\varrho}};$$

von denen z. B. die erste, in Worten ausgedrückt, folgendermassen lauten würde: Der mit dem Argument ϱ behaftete Ausdruck U_a ist, abgesehen vom Factor $\frac{A}{\varrho}$, identisch mit demjenigen Werthe, den der Ausdruck U_i annimmt, sobald man in ihm das Argument ϱ durch $\frac{A^2}{\varrho}$ ersetzt.

Die Formeln (5.) zeigen also, wie man z. B., falls das innere Potential bekannt ist, hieraus, mittelst einer einfachen Substitution, das äussere Potential zu finden vermag. Und es sind daher diese Formeln (5.) von ganz besonderer Wichtigkeit.

Dabei sei noch Folgendes bemerkt: Zwei Punkte, die auf demselben vom Kugelcentrum ausgehenden Strahle liegen, und deren Centralabstände den Kugelradius zum geometrischen Mittel haben, heissen zu einander *conjugirte* Punkte. Sind also a und i zwei derartige Punkte, ferner ϱ_a und ϱ_i ihre Centralabstände, so ist $\varrho_a \varrho_i = A^2$. Bringt man nun die Formeln (3.) auf diese beiden Punkte in Anwendung, indem man dieselben gleichzeitig noch mit $\sqrt{\varrho_a}$ und $\sqrt{\varrho_i}$ multiplicirt, so erhält man:

$$U_a \sqrt{\varrho_a} = \frac{4\pi A^3}{\sqrt{\varrho_a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{A}{\varrho_a}\right)^n Y_n(\mu, \varphi),$$

$$U_i \sqrt{\varrho_i} = 4\pi A \sqrt{\varrho_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\varrho_i}{A}\right)^n Y_n(\mu, \varphi).$$

Hieraus aber folgt, weil $\varrho_a \varrho_i = A^2$ ist, sofort:

$$(6.) \quad U_a \sqrt{\varrho_a} = U_i \sqrt{\varrho_i}.$$

Und diese Formel zeigt von Neuem den engen Zusammenhang, der zwischen dem äussern und innern Potential stattfindet. Sie zeigt nämlich, wie man, falls der Werth von U in irgend einem innern Punkte i bekannt ist, hieraus sofort den Werth von U in dem conjugirten äussern Punkte a abzuleiten vermag.

Lässt man in der zweiten Formel (3.) das ϱ zu Null herabsinken, so ergiebt sich:

$$(U_i)_{\varrho=0} = 4\pi A Y_0,$$

also mit Rücksicht auf (2.):

$$(7.) \quad (U_i)_{\varrho=0} = \frac{A}{A}.$$

Also der Satz: Wie beschaffen die auf der Kugelfläche ausgebreitete elektrische Belegung auch sein mag, stets wird ihr Potential auf den Mittelpunkt gleich sein der Gesamtmasse der Belegung, dieselbe noch dividirt durch den Kugelradius.

Noch weitere Resultate sind aus den Formeln (3.) ableitbar. Differentiirt man nämlich dieselben nach ϱ , und lässt man sodann die sollicitirten Punkte (ϱ, μ, φ) auf die Kugelfläche fallen, also ϱ in A übergehen, so erhält man:

$$(8.) \quad \frac{\partial \overline{U}_a}{\partial \varrho} = -4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} Y_n(\mu, \varphi),$$

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial \varrho} = +4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} Y_n(\mu, \varphi).$$

Hieraus folgt durch *Subtraction*, und mit Rücksicht auf (1.):

$$(9.) \quad \frac{\partial \overline{U}_a}{\partial \varrho} - \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial \varrho} = -4\pi\varepsilon,$$

eine Formel, die allerdings nichts Neues bietet, vielmehr nur als eine Bestätigung des allgemeinen Satzes (11.) pg. 171 anzusehen ist. Andererseits aber ergibt sich aus den Gleichungen (8.) durch *Addition*, und mit Rücksicht auf (4.):

$$(10.) \quad \frac{\partial \overline{U}_a}{\partial \varrho} + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial \varrho} = -\frac{\overline{U}}{A}.$$

Schliesslich folgt aus (9.) und (10.) durch *Addition*, respective *Subtraction*:

$$(11.) \quad \begin{aligned} 4\pi\varepsilon &= -\frac{\overline{U}}{A} - 2\frac{\partial \overline{U}_a}{\partial \varrho}, \\ 4\pi\varepsilon &= +\frac{\overline{U}}{A} + 2\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial \varrho}. \end{aligned}$$

§ 2.

Betrachtung des besondern Falles, dass die Belegung der Kugelfläche symmetrisch ist in Bezug auf einen Durchmesser derselben.

Ist die Belegung der Kugelfläche *symmetrisch* in Bezug auf einen Durchmesser, z. B. in Bezug auf die Axe des Polarcordinatensystems, so wird die Dichtigkeit ε der Belegung nur noch eine Function von μ sein, also [Satz (8.) pg. 85] entwickelbar sein nach den $P_n(\mu)$:

$$(12.) \quad \varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} H_n P_n(\mu),$$

wo die H 's Constanten sind. Diese Formel (12.) steht parallel der früheren Formel (1.). Alle früheren Sätze und Gleichungen sind daher auf den gegenwärtigen Fall einfach dadurch übertragbar, dass man $Y_n(\mu, \varphi)$ mit $H_n P_n(\mu)$ vertauscht. Demgemäss ergibt sich z. B. aus (3.):

$$(13.) \quad U_a = \frac{4\pi A^2}{\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{A}{\varrho}\right)^n P_n(\mu),$$

$$(14.) \quad U_i = 4\pi A \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\varrho}{A}\right)^n P_n(\mu);$$

und aus der *letzten* Formel ergibt sich, falls man daselbst $\mu = +1$ oder $= -1$ macht [unter Rücksicht auf (ξ.), (η.) pg. 32]:

$$(15.) \quad (U_i)_{\mu=+1} = 4\pi A \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\varrho}{A}\right)^n,$$

$$(16.) \quad (U_i)_{\mu=-1} = 4\pi A \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{-\varrho}{A}\right)^n.$$

Bezeichnet man aber in diesen beiden Formeln (15.), (16.) die rechte Seite der *einen* mit $f(\varrho)$, so ist offenbar die rechte Seite der *andern* $= f(-\varrho)$; so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Erster Satz. — *Ist die Belegung einer Kugel symmetrisch in Bezug auf eine durch das Centrum gehende Axe, und denkt man sich das innere Potential dieser Belegung für alle Punkte der positiven Axe gegeben $= f(\varrho)$, so wird dasselbe für die Punkte der negativen Axe ebenfalls bekannt, nämlich $= f(-\varrho)$ sein.*

Aber es ergeben sich aus der Kenntniss von $f(\varrho)$ noch viel weiter gehende Consequenzen. Denkt man sich nämlich die gegebene Function $f(\varrho)$, welche den Werth von $(U_i)_{\mu=+1}$ repräsentirt, nach Potenzen von ϱ entwickelt:

$$(17.) \quad (U_i)_{\mu=+1} = f(\varrho) = K_0 + K_1\varrho + K_2\varrho^2 + \dots,$$

so folgt durch Vergleichung dieser Entwicklung mit (15.):

$$(18.) \quad H_n = \frac{2n+1}{4\pi A} A^n K_n.$$

Die Kenntniss von $f(\varrho)$ liefert also die Kenntniss der K 's, und sodann auch die der H 's, also nach (12.), auch die Kenntniss von ε . Also der Satz:

Zweiter Satz. — *Ist die Belegung einer Kugel symmetrisch in Bezug auf eine durch das Centrum gehende Axe, und denkt man sich das innere Potential dieser Belegung für die Punkte der positiven Axe gegeben $= f(\varrho)$, so wird diese Kenntniss von $f(\varrho)$ bereits ausreichend sein zur Bestimmung der Dichtigkeit der Belegung, mithin auch zur Bestimmung des von der Belegung auf alle innern und äussern Punkte ausgeübten Potentials.*

Wir bringen diesen merkwürdigen Satz auf ein einfaches Beispiel in Anwendung. Es sei gegeben:

$$(\alpha.) \quad (U_i)_{\mu=+1} = \frac{1}{C-D\varrho}, \text{ d. i. } = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C} \left(\frac{D}{C}\right)^n \varrho^n,$$

wo C, D gegebene Constanten sind. Alsdann ist nach (17.):

$$K_n = \frac{1}{C} \left(\frac{D}{C}\right)^n,$$

also nach (18.):

$$H_n = \frac{2n+1}{4\pi C A} \left(\frac{DA}{C}\right)^n,$$

also nach (12.), (13.), (14.):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{4\pi CA} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{DA}{C}\right)^n P_n(\mu), \\ (\beta.) \quad U_a &= \frac{A}{Cq} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{DA}{Cq}\right)^n P_n(\mu), \\ U_i &= \frac{1}{C} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{DA}{C}\right)^n P_n(\mu). \end{aligned}$$

Diese drei Reihen sind übrigens leicht summierbar. So hat z. B. die letzte den Werth [vgl. (16.) pg. 34]:

$$(\gamma.) \quad U_i = \frac{1}{\sqrt{C^2 + D^2 q^2 - 2CDq\mu}}.$$

§ 3.

Anwendung auf die Frage nach der elektrischen Vertheilung.

Eine isolirte*) und mit der elektrischen Ladung A versehene Metallkugel vom Radius A sei der Einwirkung irgend welcher äusserer elektrischer Massenpunkte $M_1(A_1, \mu_1, \varphi_1)$, $M_2(A_2, \mu_2, \varphi_2)$, \dots $M_n(A_n, \mu_n, \varphi_n)$ ausgesetzt. Es soll die Dichtigkeit ε der unter so bewandten Umständen auf der Kugeloberfläche entstehenden elektrischen Belegung, sowie auch das Potential U dieser Belegung auf äussere und innere Punkte näher bestimmt werden.

Um diese Aufgabe zu lösen, bemerken wir zuvörderst [vgl. den Satz p. 158], dass das elektrische *Gesammpotential* für alle Punkte $i(\varrho, \mu, \varphi)$ *innerhalb* der Kugel *constant* sein muss, dass also die Formel* stattfinden muss:

$$(19.) \quad U_i + \sum_{h=1}^n \frac{M_h}{\sqrt{A_h^2 + \varrho^2 - 2A_h\varrho \cos \gamma_h}} = \text{Const.} = G,$$

wo γ_h die Neigung der Richtung (μ, φ) gegen (μ_h, φ_h) vorstellt. Lassen wir nun den sollicitirten Punkt $i(\varrho, \mu, \varphi)$ in das Centrum der Kugel hineinfallen, also $\varrho = 0$ werden, so folgt mit Rücksicht auf (7.):

$$(19a.) \quad \frac{A}{A} + \sum_{h=1}^n \frac{M_h}{A_h} = G.$$

Substituiren wir aber diesen Werth von G in (19.), so ergibt sich:

$$(20.) \quad U_i = \left(\frac{A}{A} + \sum \frac{M_h}{A_h}\right) - \sum \frac{M_h}{\sqrt{A_h^2 + \varrho^2 - 2A_h\varrho \cos \gamma_h}}.$$

Nachdem in solcher Weise das *innere Potential* U_i der Belegung voll-

*) Nur, um die Vorstellung zu fixiren, betrachten wir eine *isolirte* Kugel. Der Uebergang zum Fall der *abgeleiteten* Kugel ergibt sich leicht. Vgl. die Bemerkung pg. 285.

ständig berechnet ist, könnten wir nun hieraus, mittelst der zweiten Formel in (11.), sofort die Dichtigkeit ϵ der Belegung finden. Ohne uns aber hierauf weiter einzulassen, wollen wir sogleich übergehen zum äussern Potential U_a der betrachteten Belegung. Dieses ist aus U_i (20.) ableitbar mittelst des allgemeinen Satzes (5.), und hat daher, wie sich leicht ergibt, den Werth:

$$(21.) \quad U_a = \frac{\left(A + A \sum \frac{M_h}{A_h}\right)}{\epsilon} - \sum \frac{\frac{A M_h}{A_h}}{\sqrt{\epsilon^2 + \left(\frac{A A}{A_h}\right)^2 - 2\epsilon \left(\frac{A A}{A_h}\right) \cos \gamma_h}}.$$

Die hier im Nenner stehende Wurzelgrösse repräsentirt offenbar die Entfernung des sollicitirten Punktes (ρ, μ, φ) von demjenigen festen Punkte $\left(\frac{A A}{A_h}, \mu_h, \varphi_h\right)$, welcher zum Punkte $M_h (A_h, \mu_h, \varphi_h)$ in Bezug auf die Kugeloberfläche conjugirt ist. Demgemäss enthält die Formel (21.) folgenden Satz:

Erstes Theorem. — *Betrachtet man die auf einer isolirten Metallkugel durch irgend welche äusseren elektrischen Massenpunkte $M_1, M_2, \dots M_n$ inducirte Belegung, so wird das Potential dieser Belegung nach Aussen hin von genau derselben Beschaffenheit sein, als wäre es her von gewissen innern elektrischen Massenpunkten:*

$$(22.) \quad M, M_1, M_2, \dots M_n,$$

von denen der erste im Kugelcentrum a gelegen ist, während die übrigen zu $M_1, M_2, \dots M_n$ in Bezug auf die Kugeloberfläche conjugirt sind. Die Massen dieser Punkte sind folgende:

$$(23.) \quad M = A + A \sum \frac{M_l}{A_l},$$

$$M_1 = -\frac{A M_1}{A_1}, \quad M_2 = -\frac{A M_2}{A_2}, \quad \dots \quad M_n = -\frac{A M_n}{A_n}.$$

Dabei bezeichnen $A_1, A_2, \dots A_n$ die Centralabstände der Punkte $M_1, M_2, \dots M_n$, ferner A den Kugelradius, und endlich A die Gesamtmasse der betrachteten, auf der Kugeloberfläche ausgebreiteten elektrischen Belegung.

Bilden die Punkte M_1, M_2 , etc. zusammengenommen eine Kugelfläche, so bilden die conjugirten Punkte M_1, M_2 , etc. ebenfalls eine Kugelfläche*). Diese beiden Kugelflächen — sie mögen M und M heissen — liegen der Art zu einander, dass die Spitze ihres gemeinschaftlichen Umhüllungskegels mit dem Centrum a der Metallkugel

*) Vgl. die Erläuterung am Schluss dieses Paragraphs.

coincidirt. Uebersdies befindet sich M innerhalb der Metallkugel, während M ausserhalb derselben liegt. Also der Satz:

Zweites Theorem. — Betrachtet man die auf einer isolirten Metallkugel durch eine äussere elektrische Kugelfläche M inducirte Belegung, so wird das Potential dieser Belegung nach Aussen hin von



derselben Beschaffenheit sein, als rührte es her vom Centrum a der Metallkugel und daneben von derjenigen innern Kugelfläche M , welche zu M , in Bezug auf die Metallkugel, conjugirt ist. [Vgl. die vorstehende Figur.]

Mit andern Worten: Die durch M auf der gegebenen Metallkugel inducirte Belegung wird, was ihr Potential nach Aussen hin betrifft, ersetzbar sein durch a und M — Dieser einfache Satz bildet das eigentliche Fundament der im nächstfolgenden Paragraph anzustellenden Betrachtungen.

Beiläufige Bemerkung. — Denkt man sich die betrachtete Metallkugel zur Erde abgeleitet, so wird die Constante G in (19.) offenbar $= 0$ [Dritter Satz pg. 159]. Folglich wird in diesem Falle der Ausdruck (19a.), also nach (23.) auch M zu 0 werden.

Die auf einer zur Erde abgeleiteten Metallkugel durch äussere elektrische Massenpunkte $M_1, M_2, \dots M_n$ inducirte Belegung wird daher nach Aussen hin ein Potential besitzen, welches von derselben Beschaffenheit ist, als rührte es her von den zu $M_1, M_2, \dots M_n$ conjugirten Massenpunkten

$$M_1 = -\frac{A M_1}{A_1}, \quad M_2 = -\frac{A M_2}{A_2}, \quad \dots \quad M_n = -\frac{A M_n}{A_n}.$$

Dieser Satz ist für den Specialfall $n = 1$ schon früher [am Schluss des § 11 auf pg. 186] mitgetheilt worden.

Erläuterung zu pg. 284. — Zuvörderst mag folgender Satz bewiesen werden: Ist in der Ebene ein Kreis A vom Radius A und Centrum O , und ausserhalb dieses Kreises irgend eine Kreisperipherie S gegeben, und construirt man zu jedwedem Punkte x der Peripherie S den in Bezug auf A

conjugirten Punkt ξ , so werden diese Punkte ξ in ihrer Gesamtheit wiederum eine Kreisperipherie bilden, und zwar eine Peripherie, die innerhalb A liegt.

Beweis. — Man lege von O aus durch die Peripherie S eine beliebige Secante Oxy , ziehe überdies die beiden Tangenten Oc , Od und construiere zu c , d , x die in Bezug auf A conjugirten Punkte γ , δ , ξ . Alsdann ist

$$(Ox)(O\xi) = (Oc)(O\gamma) = (Od)(O\delta) = A^2;$$

woraus z. B. folgt:

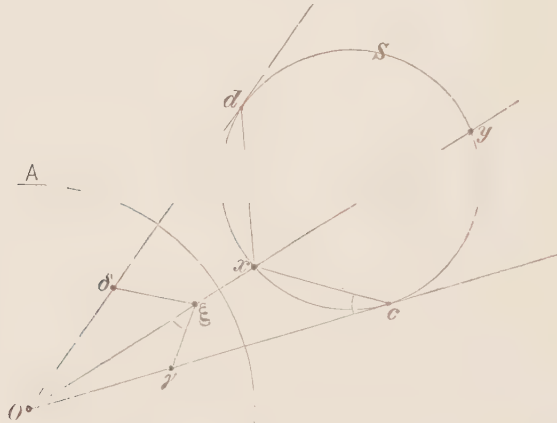
$$\triangle(O\xi\gamma) \sim \triangle(Ocx).$$

Demgemäss ist, was die Winkel anbetrifft:

$$(O\xi\gamma) = (Ocx),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(O\xi\gamma) = (cxy) - (cox).$$



Desgleichen erhält man:

$$(O\xi\delta) = (dxy) - (dOx),$$

und sodann durch Addition der beiden letzten Gleichungen:

$$(\gamma\xi\delta) = (cxd) - (cOd).$$

Lässt man nun die Secante Oxy um O sich drehen, mithin den Punkt x längs der gegebenen Peripherie S fortgleiten, so wird der Winkel (cxd) , als Peripheriewinkel, constant bleiben. Gleiches gilt daher, zufolge der letzten Formel, auch vom Winkel $(\gamma\xi\delta)$. Und hieraus folgt, dass der Punkt ξ einen Kreisbogen beschreibt. U. s. w.

Zum Schluss. — Nachdem der angegebene Satz in solcher Art bewiesen ist, erkennt man sofort, dass im Raume der entsprechende Satz über Kugelflächen gelten wird. Hiermit aber ist alsdann die oben (pg. 284) gemachte Behauptung gerechtfertigt. Dasselbst ist übrigens das Centrum von A nicht mit O , sondern mit a bezeichnet.

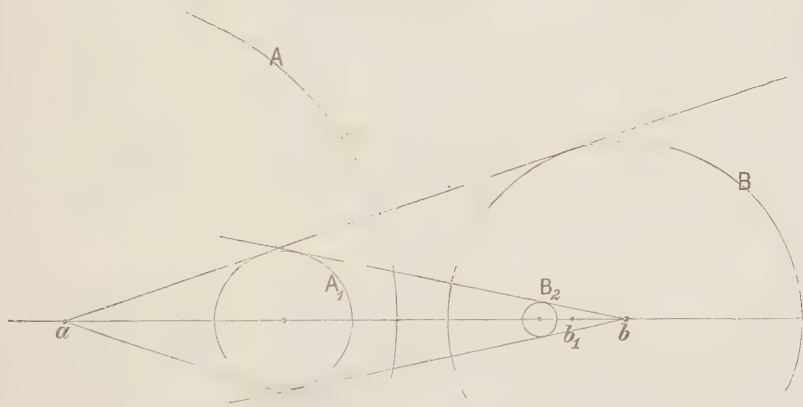
§ 4.

Das eigentlich zu behandelnde Problem.

Es sind zwei isolirte Metallkugeln mit den Centren a , b , den Radien A , B , und der Centraldistanz $C > (A + B)$ gegeben. Es sollen diejenigen elektrischen Belegungen A und B näher bestimmt werden, welche auf diesen beiden Kugeln entstehen, sobald jede derselben elektrisch geladen ist.

Offenbar kann man A als die auf der *ersten* Kugel durch B inducirte Belegung, und ebenso umgekehrt B als die auf der *zweiten* Kugel durch A inducirte Belegung ansehen. Diese einfache Vorstellungsweise kann, mittelst der im letzten Paragraph erhaltenen Theoreme, mannigfaltig abgeändert, und unsern eigentlichen Zwecken besser dienstbar gemacht werden. Wir können nämlich folgendermassen räsonniren:

Die Belegung A wird, weil sie als die durch B inducirte Belegung angesehen werden darf, dem zweiten Theorem pg. 285 sich subordiniren,



und also, was ihr *Potential nach Aussen* hin betrifft, *ersetzbar* sein durch das Centrum a und durch die zu B (in Bezug auf A) conjugirte Kugelfläche A_1 ; was angedeutet sein mag durch:

$$A \equiv (a, A_1).$$

Dieses Potential von A nach Aussen hin ist es aber, durch welches die Belegung B inducirt ist. Und in Folge der soeben genannten Ersetzbarkeit kommt es also auf dasselbe hinaus, ob man B wirklich durch A , oder aber durch a , A_1 inducirt sich vorstellt. Acceptirt man aber die letztere Vorstellungsweise, so ergibt sich aus dem ersten und zweiten Theorem, dass die Belegung B , was ihr Potential *nach Aussen*

betrifft, *ersetzbar* ist durch das Centrum b und durch die zu a , A_1 (in Bezug auf B) conjugirten Gebilde b_1 , B_2 ; was angedeutet werden mag durch:

$$B \equiv (b, b_1, B_2).$$

Dieses Potential von B nach Aussen hin ist es aber, durch welches die Belegung A inducirt ist. Und in Folge jener Ersetzbarkeit wird es daher einerlei sein, ob man A wirklich durch B, oder aber durch b , b_1 , B_2 sich inducirt vorstellt. Acceptirt man aber die letzte Vorstellungsweise, so ergibt sich aus dem ersten und zweiten Theorem, dass die Belegung A, was ihr Potential *nach Aussen hin* betrifft, *ersetzbar* ist durch das Centrum a und durch die zu b , b_1 , B_2 (in Bezug auf A) conjugirten Gebilde a_1 , a_2 , A_3 ; was angedeutet werden kann durch:

$$A \equiv (a, a_1, a_2, A_3).$$

Wenn man dieses R \ddot{a} sonnement weiter und weiter fortsetzt, so findet man, dass das Potential von A *nach Aussen hin* der Art ist, als rührte es her von $(n+1)$ *innerhalb* A gelegenen Massenpunkten a , a_1 , a_2 , ... a_n und daneben von einer ebenfalls *innerhalb* A gelegenen kleinen Kugelfläche A_{n+1} . All' jene $(n+1)$ Punkte, und ebenso auch der Mittelpunkt von A_{n+1} befinden sich auf der Centrallinie ab . Denkt man sich die Zahl n unendlich gross, so geht die Kugelfläche A_{n+1} in einen Punkt über; so dass man also zu folgendem Resultate gelangt:

Das Potential von A nach Aussen hin ist von solcher Art, als rührte es her von unendlich vielen auf der Centrallinie ab befindlichen Massenpunkten:

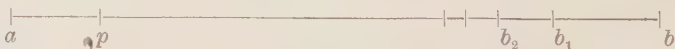
$$(P.) \quad a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots,$$

die von a aus, in der Richtung ab , auf einander folgen, dabei aber durchweg *innerhalb* der Kugelfläche A liegen.

Und ebenso wird andererseits das Potential von B *nach Aussen hin* der Art sein, als rührte es her von unendlich vielen auf ab befindlichen Massenpunkten:

$$(Q.) \quad b, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots,$$

die von b aus, in der Richtung ba , auf einander folgen, dabei aber durchweg *innerhalb* der Kugelfläche B bleiben. Markirt man also z. B. auf ab innerhalb der Kugelfläche A einen Punkt p :



und bezeichn \ddot{e} t man die Abst \ddot{a} nde der Punkte p , b_1 , b_2 , b_3 , etc. vom Centrum b mit σ , σ_1 , σ_2 , σ_3 , etc., so wird das von der Belegung B auf p ausgeübte Potential V_p einen Werth haben von folgender Gestalt:

$$(R.) \quad V_p = \frac{M}{\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{\sigma - \sigma_n},$$

wo M, M_1, M_2, M_3 , etc. die den Punkten b, b_1, b_2, b_3 , etc. beizulegenden *Massen* vorstellen. Von dieser Formel ist weiterhin Gebrauch zu machen.

Bemerkung. — Denkt man sich irgend welche Punkte 1, 2, 3, 4, 5, etc., und zwar der Art, dass 1 und 2 in Bezug auf die Kugelfläche A zu einander conjugirt sind, dass ferner 2 und 3 zu einander conjugirt sind in Bezug auf B, sodann 3 und 4 conjugirt in Bezug auf A, u. s. f., so kann man solches etwa andeuten durch das Schema:

$$1 - (A) - 2 - (B) - 3 - (A) - 4 - (B) - 5 - (A) - 6 - \text{etc. etc.},$$

wo A und B *alterniren*.

Solches festgesetzt, sind alsdann die Punkte (P.), (Q.) folgendermassen definirt:

$$b - (A) - a_1 - (B) - b_2 - (A) - a_3 - (B) - b_4 - (A) - a_5 - \text{etc. etc.},$$

$$a - (B) - b_1 - (A) - a_2 - (B) - b_3 - (A) - a_4 - (B) - b_5 - \text{etc. etc.}$$

Desgleichen sind auch die Definitionen der Kugelflächen A_h, B_h andeutbar durch die Schemata:

$$B - (A) - A_1 - (B) - B_2 - (A) - A_3 - (B) - B_4 - \text{etc. etc.},$$

$$A - (B) - B_1 - (A) - A_2 - (B) - B_3 - (A) - A_4 - \text{etc. etc.}$$

Die Bezeichnungen sind, wie man sieht, der Art eingerichtet, dass alle a_h, A_h innerhalb A, und andererseits alle b_h, B_h innerhalb B liegen.

§ 5.

Der eigentliche Kern des Problemes besteht in der Berechnung zweier Functionen $f(\rho)$ und $\varphi(\sigma)$. Aufstellung einer Functionalgleichung für $f(\rho)$.

Das elektrische *Gesammpotential* muss für alle Punkte i innerhalb A, und ebenso auch für alle Punkte j innerhalb B constant sein [Satz pg. 158]. Bezeichnet man also die von A und B, einzeln genommen, herrührenden Potentiale mit U und V , so müssen die Formeln stattfinden:

$$(1.) \quad U_i + V_i = \text{Const.} = G,$$

$$(2.) \quad U_j + V_j = \text{Const.} = H.$$

Dabei sei daran erinnert, dass die Centra der beiden Kugeln mit a, b , ihre Radien mit A, B , und ihr Centralabstand mit $C > (A + B)$ bezeichnet worden sind.

$$\begin{array}{l|l} (\alpha.) & U_p + V_p = G, \\ (\gamma.) & U_{p_1} + V_{p_1} = H, \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (\beta.) & V_p \sqrt{\sigma} = V_{p_1} \sqrt{\sigma_1}, \\ (\delta.) & U_{p_1} \sqrt{\varrho_1} = U_{p_2} \sqrt{\varrho_2}. \end{array} \right.$$

Aus ($\alpha.$); ($\beta.$) folgt durch Elimination von V_p :

$$(\varepsilon.) \quad U_p = G - V_{p_1} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}}.$$

Hieraus folgt weiter, falls man für V_{p_1} den Werth aus ($\gamma.$) einsetzt:

$$(\xi.) \quad U_p = G - H \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}} + U_{p_1} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}},$$

oder, falls man jetzt für U_{p_1} den Werth aus ($\delta.$) substituirt:

$$(\eta.) \quad U_p = G - H \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}} + U_{p_2} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}} \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}.$$

Die Gleichungen ($\varepsilon.$) und ($\eta.$) sind, mit Rücksicht auf (4.), auch so darstellbar:

$$(E.) \quad f(\varrho) = G - \varphi(\sigma_1) \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}},$$

$$(H.) \quad f(\varrho) = G - H \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}} + f(\varrho_2) \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}} \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}.$$

Diese *letzte* Formel entspricht unsern Wünschen. Denn sie repräsentirt eine Gleichung zwischen $f(\varrho)$ und $f(\varrho_2)$, d. i. zwischen zwei Werthen der Function f , die beide innerhalb A liegen. Uebrigens können wir dieser Formel (H.) und der vorhergehenden (E.), indem wir für $\sigma, \sigma_1, \varrho_1, \varrho_2$ die aus den gegenseitigen Beziehungen der Punkte p, p_1, p_2 sich ergebenden Werthe:

$$\sigma = C - \varrho,$$

$$\sigma_1 = \frac{B^2}{\sigma} = \frac{B^2}{C - \varrho},$$

$$\varrho_1 = C - \sigma_1 = \frac{(C^2 - B^2) - C\varrho}{C - \varrho},$$

$$\varrho_2 = \frac{A^2}{\varrho_1} = \frac{A^2(C - \varrho)}{(C^2 - B^2) - C\varrho}$$

substituiren, auch folgende Gestalten geben:

$$(6.) \quad f(\varrho) = G - \frac{B}{C - \varrho} \varphi\left(\frac{B^2}{C - \varrho}\right), \quad [\varrho < A],$$

$$(7.) \quad f(\varrho) = G - \frac{HB}{C - \varrho} + \frac{AB}{\varrho - C\varrho} f\left(\frac{A^2(C - \varrho)}{\varrho - C\varrho}\right), \quad [\varrho < A],$$

wo Q als Abbreviatur dient für:

$$(8.) \quad Q = C^2 - B^2;$$

so dass also dieses Q das Quadrat der vom Centrum a aus an die Kugel B gelegten *Tangente* repräsentirt.

In dieser *neuen* Gestalt ist die letzte Formel (7.) zu bezeichnen als eine *Functionalgleichung* für $f(q)$, die gültig bleibt für alle Werthe von q zwischen den Grenzen Null und A . Auf Grund dieser Functionalgleichung werden wir $f(q)$ im folgenden Paragraph wirklich berechnen. — Einstweilen sei noch bemerkt, dass die Gleichung (6.) für $q = 0$, und mit Rücksicht auf den Satz (7.) pg. 280, die Gestalt erhält:

$$(9a.) \quad \frac{A}{A} = G - \frac{B}{C} q \left(\frac{B'}{C} \right),$$

und dass in analoger Weise sich offenbar auch folgende Gleichung ergeben wird:

$$(9b.) \quad \frac{B}{B} = H - \frac{A}{C} q \left(\frac{A'}{C} \right).$$

Dabei repräsentiren A und B die Gesamtmassen der auf der ersten und zweiten Kugel ausgebreiteten elektrischen Belegungen.

§ 6.

Berechnung der Function $f(q)$.

Für jedweden auf ab innerhalb A gelegenen Punkt p gilt die Gleichung (1.):

$$U_p + V_p = G.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (4.):

$$f(q) = G - V_p, \quad [q < A],$$

also mit Rücksicht auf (R.) pg. 289:

$$(10.) \quad f(q) = G - \sum_0^{\infty} \frac{M_n}{\sigma - \sigma_n}, \quad [q < A],$$

wo die M_n , σ_n *Constanten* vorstellen. Und zwar ist:

$$(10a.) \quad \sigma_0 = 0,$$

während alle übrigen Constanten M_n , σ_n *unbekannt* sind. Selbstverständlich repräsentirt die Variable σ den Abstand des betrachteten Punktes p vom Centrum b , ebenso wie q seinen Abstand von a vorstellt. Demgemäss ist $\sigma = C - q$; so dass man also die Formel (10.) auch so schreiben kann:

$$(11.) \quad f(q) = G - \sum_0^{\infty} \frac{M_n}{(C - \sigma_n) - q}, \quad [q < A],$$

oder, falls man

$$(12.) \quad C - \sigma_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \quad \text{und} \quad M_n = - \frac{\gamma_n}{\beta_n}$$

setzt, auch so:

$$(13.) \quad f(\varrho) = G + \sum_0^{\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n - \beta_n \varrho}, \quad [\varrho < A].$$

Es handelt sich jetzt also darum, die unbekannten Constanten α , β , γ der Art zu bestimmen, dass die Function $f(\varrho)$ der in (7.) aufgestellten Functionalgleichung Genüge leistet.

Substituirt man für $f(\varrho)$ den Werth (13.) in jene Functionalgleichung (7.), so nimmt die rechte Seite derselben die Gestalt an:

$$G - \frac{HB}{C - \varrho} + \frac{AB}{\varrho - C\varrho} \left\{ G + \sum_0^{\infty} \frac{\gamma_n(Q - C\varrho)}{\alpha_n(Q - C\varrho) - \beta_n A^2(C - \varrho)} \right\},$$

d. i. folgende Gestalt:

$$(\xi.) \quad G + \underbrace{\left(\frac{-HB}{C - \varrho} \right)}_{\mathfrak{A}} + \underbrace{\left(\frac{GAB}{\varrho - C\varrho} \right)}_{\mathfrak{B}} + \underbrace{\sum_0^{\infty} \frac{\gamma_n AB}{(\alpha_n Q - \beta_n A^2 C) - (\alpha_n C - \beta_n A^2)\varrho}}_{\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \dots},$$

während ihre linke Seite lauten wird:

$$(\eta.) \quad G + \sum_0^{\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n - \beta_n \varrho}.$$

Soll also jene Functionalgleichung erfüllt werden, so müssen diese Ausdrücke ($\xi.$) und ($\eta.$) hinsichtlich der Variablen ϱ unter einander identisch werden. Solches aber wird erreicht, wenn man die in ($\eta.$) den Stellenzahlen

$$n = 0, \quad n = 1, \quad n = 2, \quad n = 3, \quad n = 4, \quad \text{etc.}$$

entsprechenden Glieder respective mit den Gliedern

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C}_0, \quad \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{C}_2, \quad \text{etc.}$$

des Ausdruckes ($\xi.$) zur Uebereinstimmung bringt, also dadurch erreicht, dass man die unbekannten Constanten α , β , γ folgenden Relationen unterwirft*):

*) Was diese auf der folgenden Seite in (14.) angegebenen Relationen betrifft, so ergibt sich aus denselben z. B.: $\frac{\alpha_0}{\beta_0} = C$, d. i. nach (12.): $C - \sigma_0 = C$, d. i.: $\sigma_0 = 0$; was in Einklang steht mit (10a.).

$\alpha_0 = C$	$\beta_0 = 1$	$\gamma_0 = -BH$
$\alpha_1 = Q$	$\beta_1 = C$	$\gamma_1 = ABG$
$\alpha_2 = \alpha_0 Q - \beta_0 A^2 C$	$\beta_2 = \alpha_0 C - \beta_0 A^2$	$\gamma_2 = AB\gamma_0$
$\alpha_3 = \alpha_1 Q - \beta_1 A^2 C$	$\beta_3 = \alpha_1 C - \beta_1 A^2$	$\gamma_3 = AB\gamma_1$
$\alpha_4 = \alpha_2 Q - \beta_2 A^2 C$	$\beta_4 = \alpha_2 C - \beta_2 A^2$	$\gamma_4 = AB\gamma_2$
etc. etc.	etc. etc.	etc.

Hieraus folgt sofort:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= -BH, & \gamma_1 &= (AB)G, \\
 \gamma_2 &= -(AB)BH, & \gamma_3 &= (AB)^2 G, \\
 \gamma_4 &= -(AB)^2 BH, & \gamma_5 &= (AB)^3 G, \\
 &\text{etc.} & &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

oder, falls man diese Werthe der γ 's in (13.) substituirt:

$$\begin{aligned}
 (15.) \quad f(q) &= -BH \left(\frac{1}{\alpha_0 - \beta_0 q} + \frac{AB}{\alpha_1 - \beta_1 q} + \frac{(AB)^2}{\alpha_2 - \beta_2 q} + \dots \right) \\
 &\quad + G \left(1 + \frac{AB}{\alpha_1 - \beta_1 q} + \frac{(AB)^2}{\alpha_2 - \beta_2 q} + \frac{(AB)^3}{\alpha_3 - \beta_3 q} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Führt man nun, um eine bessere Symmetrie und Uebersichtlichkeit hervorzubringen, für die Constanten α, β eine etwas andere Bezeichnungswiese ein, indem man setzt:

$$(16a.) \quad \alpha_0 = A_0, \quad \alpha_2 = A_1, \quad \alpha_4 = A_2, \quad \dots \quad \alpha_{2h} = A_h, \quad \dots, \\
 \beta_0 = B_0, \quad \beta_2 = B_1, \quad \beta_4 = B_2, \quad \dots \quad \beta_{2h} = B_h, \quad \dots,$$

und andererseits:

$$(16b.) \quad \alpha_1 = A_1^*, \quad \alpha_3 = A_2^*, \quad \alpha_5 = A_3^*, \quad \dots \quad \alpha_{2h-1} = A_h^*, \quad \dots, \\
 \beta_1 = B_1^*, \quad \beta_3 = B_2^*, \quad \beta_5 = B_3^*, \quad \dots \quad \beta_{2h-1} = B_h^*, \quad \dots,$$

so gewinnt die Formel (15.) die Gestalt:

$$f(q) = BH \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(AB)^n}{A_n - B_n q} + G \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(AB)^n}{A_n^* - B_n^* q} \right),$$

oder, noch einfacher geschrieben, folgende Gestalt:

$$(17.) \quad f(q) = -BH \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(AB)^n}{A_n - B_n q} + G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(AB)^n}{A_n^* - B_n^* q},$$

wo alsdann unter A_0^* und B_0^* zwei *neue* Constanten zu verstehen sind, deren Werthe lauten:

$$(18.) \quad A_0^* = 1, \quad B_0^* = 0.$$

Gleichzeitig zerfallen die für die α, β aufgestellten Relationen (14.) bei Einführung der neuen Bezeichnungsweise (16a., b.), und unter Zuziehung der Formeln (18.), in folgende Tabelle für die A, B:

$$(19.) \quad \begin{array}{|l|l|} \hline A_0 = C & B_0 = 1 \\ \hline A_1 = A_0 Q - B_0 A^2 C & B_1 = A_0 C - B_0 A^2 \\ A_2 = A_1 Q - B_1 A^2 C & B_2 = A_1 C - B_1 A^2 \\ A_3 = A_2 Q - B_2 A^2 C & B_3 = A_2 C - B_2 A^2 \\ \text{etc.} & \text{etc.} \\ \hline \end{array}$$

und in folgende zweite Tabelle für die A^*, B^* :

$$(20.) \quad \begin{array}{|l|l|} \hline A_0^* = 1 & B_0^* = 0 \\ \hline A_1^* = A_0^* Q - B_0^* A^2 C & B_1^* = A_0^* C - B_0^* A^2 \\ A_2^* = A_1^* Q - B_1^* A^2 C & B_2^* = A_1^* C - B_1^* A^2 \\ A_3^* = A_2^* Q - B_2^* A^2 C & B_3^* = A_2^* C - B_2^* A^2 \\ \text{etc.} & \text{etc.} \\ \hline \end{array}$$

Die Berechnung der Function $f(\varrho)$ wird also vollendet sein, sobald wir die Werthe der in (17.) enthaltenen Constanten A, B und A^*, B^* mittelst dieser beiden Tabellen (19.) und (20.) wirklich ermittelt haben werden. Nun ist nach (19.):

$$(\alpha.) \quad A_n = A_{n-1} Q - B_{n-1} A^2 C \quad \text{und} \quad B_n = A_{n-1} C - B_{n-1} A^2.$$

Aus der Formel links folgt:

$$(\beta.) \quad B_{n-1} = \frac{Q A_{n-1} - A_n}{A^2 C},$$

also durch Vertauschung von n mit $(n+1)$:

$$(\gamma.) \quad B_n = \frac{Q A_n - A_{n+1}}{A^2 C}.$$

Substituirt man diese Werthe $(\beta.)$, $(\gamma.)$ in die Formel $(\alpha.)$ rechter Hand, so erhält man nach gehöriger Reduction und mit Rücksicht auf (8.) zur Bestimmung der A's die Gleichung:

$$(21.) \quad A_{n+1} - (C^2 - A^2 - B^2) A_n + A^2 B^2 A_{n-1} = 0.$$

Setzt man hier $A_n = \omega^n$, so erhält man für ω die quadratische Gleichung:

$$(22.) \quad \omega^2 - (C^2 - A^2 - B^2) \omega + A^2 B^2 = 0,$$

deren Wurzeln ω_1, ω_2 den Relationen entsprechen:

$$(22a.) \quad \begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= C^2 - A^2 - B^2, \\ \omega_1 \omega_2 &= A^2 B^2. \end{aligned}$$

Der Gleichung (21.) geschieht also Genüge, wenn man

$$(23.) \quad A_n = \lambda_1 \omega_1^n + \lambda_2 \omega_2^n$$

setzt; woraus alsdann für das in (γ .) angegebene B_n der Werth resultirt:

$$B_n = \frac{Q(\lambda_1 \omega_1^n + \lambda_2 \omega_2^n) - (\lambda_1 \omega_1^{n+1} + \lambda_2 \omega_2^{n+1})}{A^2 C},$$

d. i. der Werth:

$$(24.) \quad B_n = \frac{\lambda_1 (Q - \omega_1) \omega_1^n + \lambda_2 (Q - \omega_2) \omega_2^n}{A^2 C}.$$

Um die noch unbekannten Constanten λ_1 und λ_2 zu finden, dienen die Formeln *erster Zeile* in der Tabelle (19.), d. i. die Formeln: $A_0 = C$ und $B_0 = 1$. Mit Rücksicht auf diese ergibt sich nämlich aus (23.) und (24.) für $n = 0$:

$$\begin{aligned} C &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ A^2 C &= \lambda_1 (Q - \omega_1) + \lambda_2 (Q - \omega_2); \end{aligned}$$

und hieraus folgt, unter Rücksichtnahme auf (8.) und (22a.):

$$\lambda_1 = \frac{C \omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{C \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Substituirt man endlich diese Werthe von λ_1, λ_2 in die Formeln (23.) und (24.), so erhält man, mit abermaliger Rücksicht auf (8.) und (22a.):

$$(25.) \quad \begin{cases} A_n = \frac{A^2 C (\omega_1^{n+1} - \omega_2^{n+1})}{A^2 (\omega_1 - \omega_2)}, \\ B_n = \frac{(A^2 + \omega_2) \omega_1^{n+1} - (A^2 + \omega_1) \omega_2^{n+1}}{A^2 (\omega_1 - \omega_2)}. \end{cases}$$

In analoger Weise sind die A^*, B^* aus der Tabelle (20.) bestimmbar. Man erhält dabei offenbar für diese A^*, B^* *genau dieselben* Werthe, welche in (23.), (24.) für die A, B aufgestellt sind. Ein Unterschied tritt alsdann aber ein bei der Berechnung von λ_1 und λ_2 ; welche hier zu erfolgen hat auf Grund der in (20.) angegebenen Anfangsformeln: $A_0^* = 1$ und $B_0^* = 0$. Man erhält in solcher Weise für die A^*, B^* die Werthe:

$$(26.) \quad \begin{cases} A_n^* = \frac{(A^2 + \omega_1) \omega_1^n - (A^2 + \omega_2) \omega_2^n}{\omega_1 - \omega_2}, \\ B_n^* = \frac{C (\omega_1^n - \omega_2^n)}{\omega_1 - \omega_2}. \end{cases}$$

Substituirt man schliesslich die Werthe (25.), (26.) in (17.), so erhält man:

$$(27.) \quad f(\varrho) = G \sum_0^{\infty} \frac{(AB)^n (\omega_1 - \omega_2)}{[(A^2 + \omega_1) \omega_1^n - (A^2 + \omega_2) \omega_2^n] - [C(\omega_1^n - \omega_2^n)] \varrho} - \\ - HA \sum_0^{\infty} \frac{(AB)^{n+1} (\omega_1 - \omega_2)}{[A^2 C(\omega_1^{n+1} - \omega_2^{n+1})] - [(A^2 + \omega_2) \omega_1^{n+1} - (A^2 + \omega_1) \omega_2^{n+1}] \varrho}.$$

Hiermit ist die Berechnung von $f(\varrho)$ vollendet. Denn ω_1 und ω_2 sind bekannte Constanten, nämlich nichts Anderes als die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (22.).

§ 7.

Die schliessliche Lösung des Problems.

Das gesuchte Potential U ist für alle auf ab und innerhalb A gelegenen Punkte mit $f(\varrho)$ bezeichnet worden, und besitzt also für all' diese Punkte den in (27.) angegebenen Werth, d. i. einen Werth von der Form:

$$\sum \frac{1}{C_h - D_h \varrho},$$

wo die C_h , D_h Constanten sind, während ϱ den Abstand der betrachteten Punkte vom Centrum a vorstellt. Hieraus aber folgt, mittelst eines früheren Satzes (γ .) pg. 283, dass dieses Potential in jedwedem *innerhalb* A gelegenen Punkte (ϱ, μ, φ) den Werth hat:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{C_h^2 + D_h^2 \varrho^2 - 2 C_h D_h \varrho \mu}}.$$

Beachten wir also die eigentlichen Werthe der Constanten C_h , D_h , wie sie in (27.) unserem Blicke sich darbieten, so erkennen wir, dass das Potential U in jedwedem Punkte $i(\varrho, \mu, \varphi)$ *innerhalb* A folgendermassen lautet:

$$(28.) \quad U_i = G \sum_0^{\infty} \frac{(AB)^n (\omega_1 - \omega_2)}{\sqrt{[A^2 + \omega_1) \omega_1^n - (A^2 + \omega_2) \omega_2^n]^2 + [C(\omega_1^n - \omega_2^n)]^2 \varrho^2 - 2[[]] \varrho \mu}} - \\ - HA \sum_0^{\infty} \frac{(AB)^{n+1} (\omega_1 - \omega_2)}{\sqrt{[A^2 C(\omega_1^{n+1} - \omega_2^{n+1})]^2 + [(A^2 + \omega_2) \omega_1^{n+1} - (A^2 + \omega_1) \omega_2^{n+1}]^2 \varrho^2 - 2[[]] \varrho \mu}},$$

wo bei jeder Wurzelgrösse unter $[[]]$ diejenigen beiden Ausdrücke zu verstehen sind, welche in den beiden ersten Gliedern der Wurzelgrösse in eckigen Klammern sich vorfinden.

Noch ist, was die Formel (28.) anbelangt, zu bemerken, dass für jeden Punkt $i(\varrho, \mu, \varphi)$ unter ϱ der Abstand vom Centrum a , und unter μ der Cosinus desjenigen Winkels zu verstehen ist, unter welchem dieser Abstand ϱ gegen die Centrallinie ab geneigt ist.

Aus U_i ergeben sich nun das Potential U_a der Belegung A auf äussere Punkte, und ferner die Dichtigkeit ε dieser Belegung mittelst der bekannten Formeln:

$$(29.) \quad U_a \sqrt{\varrho_a} = U_i \sqrt{\varrho_i}, \quad [\text{vgl. (6.) pg. 280}],$$

und

$$(30.) \quad 4\pi\varepsilon = \frac{\bar{U}}{A} + 2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \varrho}, \quad [\text{vgl. (11.) pg. 281}].$$

Dass analoge Formeln für das Potential V und die Dichtigkeit ξ der Belegung B sich ergeben werden, bedarf kaum noch der Erwähnung.

Schliesslich aber würden alsdann noch die in den beiden Kugeln vorhandenen constanten Potentialwerthe G und H zu ermitteln sein. Dies kann, falls die Ladungen der beiden Kugeln, d. i. die Gesamtmassen A und B ihrer Belegungen *gegeben* sind, offenbar dadurch erreicht werden, dass man den für $f(\varrho)$ erhaltenen Werth (27.) und den analogen Werth der Function $\varphi(\sigma)$ in die beiden Gleichungen (9a., b.) pg. 292 substituirt, und sodann aus diesen beiden Gleichungen G und H berechnet.

§ 8.

Betrachtung des speciellen Falles, dass die beiden gegebenen Kugeln **einander berühren**.

In diesem Falle nimmt die quadratische Gleichung (22.):

$$\omega^2 - (C^2 - A^2 - B^2)\omega + A^2B^2 = 0,$$

weil $C = A + B$ wird, die Gestalt an:

$$(\omega - AB)^2 = 0;$$

so dass sich also ergibt:

$$(\alpha.) \quad \omega_1 = \omega_2 = AB.$$

Um nun den unter so bewandten Umständen in der Gestalt \sum_0^0 erscheinenden Ausdruck (27.) der Function $f(\varrho)$, seinem wahren Werthe nach, zu erkennen, sei zuvörderst bemerkt, dass jener Ausdruck (27. folgendermassen darstellbar ist:

$$(\beta.) \quad f(\varrho) = G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(AB)^n}{(A^2 - C\varrho)\Omega_n + \Omega_{n+1}} - HA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(AB)^{n+1}}{(C - \varrho)A^2\Omega_{n+1} - \varrho\omega_1\omega_2\Omega_n},$$

wo alsdann Ω_n die Bedeutung hat:

$$\Omega_n = \frac{\omega_1^n - \omega_2^n}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Für den zu betrachtenden Specialfall (α): $\omega_1 = \omega_2 = AB$, wird also:

$$\Omega_n = \frac{n \omega_1^{n-1}}{1} = n(AB)^{n-1};$$

wodurch die Formel (β) die Gestalt erhält:

$$(\gamma.) \quad f(q) = G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{AB}{n(A^2 - Cq) + (n+1)AB} - HA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{AB}{(n+1)(C-q)A^2 - nqAB}.$$

Die beiden einander berührenden Kugeln repräsentiren offenbar zusammengenommen *einen einzigen* in sich zusammenhängenden Conductor. Mithin ist $G = H$, überdies $C = A + B$. Und mit Rücksicht hierauf können wir den Ausdruck (γ .) auch so schreiben:

$$f(q) = G \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{AB}{n(A+B)(A-q) + AB} - \frac{AB}{n(A+B)(A-q) + A(A+B-q)} \right\},$$

oder auch so:

$$f(q) = \frac{GAB}{(A+B)(A-q)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n + \frac{AB}{(A+B)(A-q)}} - \frac{1}{n + \frac{A(A+B-q)}{(A+B)(A-q)}} \right\},$$

oder, unter Anwendung der bekannten Formel:

$$\frac{1}{n + \gamma} = \int_0^1 t^{n+\gamma-1} dt,$$

auch so:

$$(\kappa.) \quad f(q) = \frac{GAB}{(A+B)(A-q)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (t^{n+\gamma-1} - t^{n+\delta-1}) dt,$$

wo alsdann γ und δ die Bedeutungen haben:

$$(\lambda.) \quad \gamma = \frac{AB}{(A+B)(A-q)} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{A(A+B-q)}{(A+B)(A-q)}.$$

Da nun $1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{1}{1-t}$ ist, so erhalten wir aus (κ):

$$f(q) = \frac{GAB}{(A+B)(A-q)} \int_0^1 (t^{\gamma-1} - t^{\delta-1}) \frac{dt}{1-t},$$

oder schliesslich, indem wir für γ, δ ihre eigentlichen Werthe (λ .) eintreten lassen:

$$(1.) \quad f(q) = \frac{GAB}{(A+B)(A-q)} \int_0^1 \left(t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 \right) \left(t^{\frac{Bq}{(A+B)(A-q)}} \right) \frac{dt}{1-t}.$$

Desgleichen wird sich für die der *andern* Kugel zugehörige Function $\varphi(\sigma)$ der analoge Werth ergeben:

$$(2.) \quad \varphi(\sigma) = \frac{GAB}{(A+B)(B-\sigma)} \int_0^1 \left(t^{-\frac{B}{A+B}} - 1 \right) \left(t^{\frac{A\sigma}{(A+B)(B-\sigma)}} \right) \frac{dt}{1-t}.$$

Nachdem in solcher Weise die Functionen $f(\varrho)$ und $\varphi(\sigma)$ bestimmt, und in ziemlich einfacher und eleganter Form dargestellt sind, können wir, auf Grund dieser Functionen, sofort z. B. die *Gesammtmassen* A und B der beiden Belegungen angeben. Zufolge des Satzes (7.) pg. 280 ist nämlich:

$$\frac{A}{A} = (U_i)_{\varrho=0}, \quad \text{d. i.} = f(0),$$

und ebenso:

$$\frac{B}{B} = (V_i)_{\sigma=0}, \quad \text{d. i.} = \varphi(0).$$

Demgemäss ergibt sich aus (1.), (2.):

$$(3.) \quad A = \frac{GAB}{A+B} \int_0^1 \left(t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 \right) \frac{dt}{1-t},$$

$$(4.) \quad B = \frac{GAB}{A+B} \int_0^1 \left(t^{-\frac{B}{A+B}} - 1 \right) \frac{dt}{1-t}.$$

Um den Grad der Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu zeigen, theilen wir einige Beobachtungen von *Coulomb* mit. Dieser bestimmte die Dichtigkeit der Elektrizität auf zwei Kugeln verschiedener Grösse, denen eine gegebene Elektrizitätsmenge zuertheilt war, und die hierauf getrennt*) worden waren. Er maass also die Grössen:

$$(5.) \quad \alpha = \frac{A}{4\pi A^2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{B}{4\pi B^2}.$$

Das Verhältniss dieser Grössen ist nach (3.), (4.):

$$(6.) \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{A^2}{B^2} \frac{\int_0^1 \left(t^{-\frac{B}{A+B}} - 1 \right) \frac{dt}{1-t}}{\int_0^1 \left(t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 \right) \frac{dt}{1-t}}.$$

Nach dieser Formel berechnete nun *Poisson* die den *Coulomb'schen* Beobachtungen entsprechenden theoretischen Werthe. Es ergab sich:

B : A	$\beta : \alpha$	
	beobachtet	berechnet
1 : 2	1,08	1,160
1 : 4	1,30	1,316
1 : 8	1,65	1,444

*) Es ist darunter die Auseinanderrückung der beiden Kugeln bis zu demjenigen Abstände zu verstehen, bei welchem sie nicht mehr inducirend auf einander einwirken.

Die Uebereinstimmung ist bei der Schwierigkeit der Beobachtung eine vollständig zufriedenstellende. Andere Beobachtungen Coulomb's zeigen, der Theorie gegenüber, eine noch bessere Uebereinstimmung; wie weiterhin gezeigt werden soll.

§ 9.

Die Vertheilung der Elektrizität auf zwei einander berührenden Kugeln für den Fall, dass der Radius der einen Kugel unendlich klein wird.

Das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ nähert sich mit abnehmendem $\frac{B}{A}$ einer gewissen Grenze, die *Coulomb* nicht genau angeben konnte. Er schloss aus seinen Beobachtungen, dass dieselbe nicht viel verschieden von 2 sei. Um diese Grenze theoretisch angeben zu können, entwickeln wir zuvörderst den Ausdruck

$$t^{\frac{B}{A+B}}$$

nach Potenzen des Exponenten:

$$t^{\frac{B}{A+B}} = 1 + \frac{B \log t}{A+B} + \frac{1}{2} \left(\frac{B \log t}{A+B} \right)^2 + \dots,$$

und erhalten also für ein äusserst kleines B :

$$(7.) \quad t^{\frac{B}{A+B}} - 1 = \frac{B \log t}{A},$$

und ebenso:

$$(8.) \quad t^{-\frac{B}{A+B}} - 1 = -\frac{B \log t}{A}.$$

Demgemäss ergibt sich für das *obere* der in (6.) enthaltenen beiden Integrale der Werth:

$$(9.) \quad \int_0^1 \left(t^{-\frac{B}{A+B}} - 1 \right) \frac{dt}{1-t} = -\frac{B}{A} \int_0^1 \frac{\log t \cdot dt}{1-t}.$$

Das *untere* jener beiden in (6.) enthaltenen Integrale kann zuvörderst, auf Grund der identischen Gleichung:

$$t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 = (1-t) t^{\frac{B}{A+B}-1} + \left(t^{\frac{B}{A+B}} - 1 \right)$$

in die Form versetzt werden:

$$\int_0^1 \left(t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 \right) \frac{dt}{1-t} = \frac{A+B}{B} + \int_0^1 \left(t^{\frac{B}{A+B}} - 1 \right) \frac{dt}{1-t}.$$

Entwickelt man jetzt nach steigenden Potenzen von B und vernachlässigt dabei das B^2 , so ergibt sich, mit Rücksicht auf (7.):

$$(10.) \quad \int_0^1 \left(t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 \right) \frac{dt}{1-t} = \frac{A+B}{B} + \frac{B}{A} \int_0^1 \frac{\log t \cdot dt}{1-t}.$$

Substituirt man aber diese Werthe (9.), (10.) in (6.), und setzt man dabei zur Abkürzung:

$$(11.) \quad L = \int_0^1 \frac{\log t \cdot dt}{1-t},$$

so erhält man:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A^2}{B^2} \frac{-\frac{B}{A} L}{\frac{A+B}{B} + \frac{B}{A} L},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-L}{\frac{A+B}{A} + \left(\frac{B}{A}\right)^2 L},$$

also schliesslich für $B = 0$:

$$(12.) \quad \frac{\beta}{\alpha} = -L,$$

wo L die in (11.) angegebene Bedeutung hat.

Entwickelt man den in L unter dem Integralzeichen befindlichen Nenner nach Potenzen von t , so erhält man:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n \log t \cdot dt,$$

d. i.:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{t^{n+1} \log t}{n+1} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_{t=0}^{t=1},$$

also, weil $t \log t$ für $t = 0$ verschwindet:

$$L = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = - \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \right].$$

Dies in (12.) substituirt, giebt:

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots,$$

oder, was dasselbe ist:

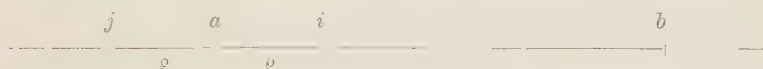
$$(13.) \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi^2}{6} = 1,64\dots$$

Wir sehen somit, dass dieser Grenzwert, gegen welchen der Quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ für $B = 0$, der Theorie zufolge, convergirt, bedeutend kleiner als 2, d. i. bedeutend kleiner als derjenige Grenzwert ist, den *Coulomb* nach dieser Richtung hin vermuthet hatte.

§ 10.

Ueber die elektrische Dichtigkeit zweier einander berührenden Kugeln an denjenigen Stellen, die der Berührungsstelle diametral gegenüberliegen.

Die Berührungsstelle o der beiden Kugeln ist offenbar die Stelle der *kleinsten* Dichtigkeit (dieselbe wird dort $= 0$ sein, zufolge des allgemeinen Satzes pg. 177). Andererseits werden die zu o diametral gegenüberliegenden Stellen -- sie mögen a_1 und b_1 heissen -- die Stellen der *grössten* Dichtigkeit sein. Um nun die diesen Punkten a_1 und b_1 zugehörigen Dichtigkeiten α_1 und β_1 zu finden, markire man auf der Centrallinie (resp. auf der Verlängerung derselben) zu beiden Seiten von a zwei Punkte j und i , beide *innerhalb* A , und beide gleich weit vom Centrum a entfernt:



Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Werth dieser beiden Centralabstände (aj) und (ai) mit q , so wird das Potential U im Punkte i den Werth $U = f(q)$, und folglich [vgl. den ersten Satz pg. 282] im Punkte j den Werth $U_j = f(-q)$ besitzen. Somit folgt, unter Anwendung des in (1.) für $f(q)$ gefundenen Ausdruckes:

$$(14.) \quad U_j = \frac{GAB}{(A+B)(A+q)} \int_0^1 \left(t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 \right) \left(t^{-\frac{Bq}{(A+B)(A+q)}} \right) \frac{dt}{1-t}.$$

Aus diesem Werthe von U_j ist aber die an der Stelle a_1 vorhandene Dichtigkeit α_1 ableitbar mittelst des Satzes (11.) pg. 281, d. i. mittelst der Formel:

$$4\pi\alpha_1 = \left(\frac{U_j}{A} + 2 \frac{\partial U_j}{\partial q} \right)_{q=A}.$$

Substituirt man hier für U_j den Werth (14.), so ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$(15.) \quad \alpha_1 = \frac{-GB^2}{16\pi A(A+B)^2} \int_0^1 \left(t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 \right) \left(t^{-\frac{B}{2(A+B)}} \right) \frac{\log t \cdot dt}{1-t}.$$

Und hieraus ergibt sich β_1 durch Vertauschung von A mit B . Man erhält also:

$$(16.) \quad \beta_1 = \frac{-GA^2}{16\pi B(A+B)^2} \int_0^1 \left(t^{-\frac{B}{A+B}} - 1 \right) \left(t^{-\frac{A}{2(A+B)}} \right) \frac{\log t \cdot dt}{1-t}.$$

Die *mittlere* elektrische Dichtigkeit α auf der Kugel A hat den Werth

$$\alpha = \frac{A}{4\pi A^2}, \quad [\text{vgl. (5.) pg. 300}],$$

woraus mit Rücksicht auf (3.) sich ergibt:

$$(17.) \quad \alpha = \frac{GB}{4\pi A(A+B)} \int_0^1 \left(t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 \right) \frac{dt}{1-t}.$$

Nunmehr folgt aus (16.) und (17.) durch Division:

$$(18.) \quad \frac{\beta_1}{\alpha} = \frac{-A^3}{4B^2(A+B)} \frac{\int_0^1 \left(t^{-\frac{B}{A+B}} - 1 \right) \left(t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 \right) \frac{\log t \cdot dt}{1-t}}{\int_0^1 \left(t^{-\frac{A}{A+B}} - 1 \right) \frac{dt}{1-t}}.$$

α ist die *mittlere* Dichtigkeit auf der Kugel A, und β_1 die *grösste* Dichtigkeit auf der Kugel B. Der in (18.) berechnete Quotient $\frac{\beta_1}{\alpha}$ kann daher bezeichnet werden als das Verhältniss der *grössten* Dichtigkeit der *einen* Kugel zur *mittleren* Dichtigkeit der *andern*.

Folgende Tabelle gestattet, die betreffenden Beobachtungen *Coulomb's* mit den nach der Formel (18.) berechneten Zahlenwerthen zu vergleichen:

$\frac{B}{A}$	$\frac{\beta_1}{\alpha}$	
	beobachtet	berechnet
1	1,27	1,32
$\frac{1}{2}$	1,55	1,83
$\frac{1}{4}$	2,35	2,47
$\frac{1}{8}$	3,18	3,09

Hier ist die Uebereinstimmung durchaus zufriedenstellend, falls wir die Unsicherheit der Beobachtungsmethoden in Anschlag bringen.

An der Berührungsstelle der beiden Kugeln muss die elektrische Dichtigkeit = 0 sein [zufolge des allgemeinen Satzes pg. 177]. Dies lässt sich ebenfalls auf Grund der für $f(\varphi)$ und $\varphi(\sigma)$ gefundenen Formeln nachweisen; was hier aber nicht weiter ausgeführt werden soll.

Eine besonders schöne von *Coulomb* angestellte Beobachtung ist folgende: Zwei *positive* elektrisirte Kugeln A und B, von denen A die *grössere*, und B die *kleinere* sein soll, mögen, nachdem sie mit einander in Berührung gewesen sind, von einander weiter und weiter entfernt werden. Bezeichnet man nun in jedem Augenblicke dieser Bewegung die einander *zunächst* gelegenen Punkte der beiden Kugeln mit a_0 und b_0 , so werden die in a_0 und b_0 vorhandenen elektrischen Dichtigkeiten zu Anfang, d. i. im Augenblicke der Berührung, $= 0$ sein. Sobald aber die Kugeln sich von einander zu entfernen beginnen, wird die Dichtigkeit in a_0 einen *positiven*, die in b_0 einen *negativen* Werth annehmen, wie solches die *Coulomb'schen* Beobachtungen ergaben. Denkt man sich endlich die Kugeln soweit von einander entfernt, dass sie nicht mehr inducirend auf einander wirken, so werden die Dichtigkeiten in a_0 und b_0 *beide positiv* sein. Demgemäss erleidet also das Vorzeichen der in b_0 vorhandenen Dichtigkeit, während der in Rede stehenden Bewegung, einen Wechsel.

Mit andern Worten: Die in b_0 vorhandene Dichtigkeit ist zu Anfang (im Augenblicke der Berührung) $= 0$; sie wird sodann, falls die beiden Kugeln von einander entfernt werden, zuerst *negativ*, sodann wieder 0, und hierauf *positiv*. Die Centraldistanz, für welche diese in b_0 vorhandene Dichtigkeit zum zweiten Male 0 wird, hat *Coulomb* beobachtet. Sie lässt sich theoretisch berechnen auf Grund der für $f(\varrho)$ und $\varphi(\sigma)$ gefundenen Formeln; worauf indessen hier nicht näher eingegangen werden soll. Man vgl. pg. 13 und pg. 92 der schon citirten *Poisson'schen* Abhandlung vom Jahre 1812.

§ 11.

Beiläufige Betrachtung.

Durch den zweiten Satz pg. 282 ist ein Verfahren angegeben, mittelst dessen man den Werth U_i aus $f(\varrho)$ abzuleiten im Stande ist, wo i einen *beliebigen* Punkt innerhalb der Kugel A vorstellt.

Eine *andere* und zuweilen *bequemere* Methode zur Ableitung von U_i aus $f(\varrho)$ ergiebt sich in folgender Weise: Das Potential $U = U(x, y, z)$ rührt von Massen her, die auf der gegebenen Kugelfläche A ausgebreitet sind, und *symmetrisch* zur x -Axe liegen. Demgemäss wird dieses Potential $U = U(x, y, z)$ *dieselbe Symmetrie* besitzen, also in Wirklichkeit nur von *zwei* Argumenten x und r abhängen, wo r die Länge des vom Punkte (x, y, z) auf die x -Axe gefällten Perpendikels vorstellt. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

welcher U Genüge leistet, kann daher einfacher so geschrieben werden:

$$(\alpha.) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

Denkt man sich nun die Function $U(x, y, z)$ oder $U(x, r)$ nach Potenzen von r entwickelt:

$$(\beta.) \quad U(x, r) = X_0 + X_1 r + X_2 r^2 + \dots,$$

wo die X nur noch von x abhängen, so ergibt sich zunächst, indem man $r = 0$ setzt:

$$(\gamma.) \quad X_0 = U(x, 0) = f(x),$$

wo $f(x)$ den Werth von U auf der x -Axe im Fusspunkte des Perpendikels r vorstellt. Substituirt man sodann die Entwicklung $(\beta.)$ in $(\alpha.)$, so bestimmen sich X_1, X_2, X_3, \dots . Und zwar ergibt sich in solcher Weise, dass X_1, X_3, X_5, \dots sämmtlich $= 0$ sind, während X_2, X_4, X_6, \dots in einfacher Art durch X_0 d. i. durch $f(x)$ [vgl. $(\gamma.)$] sich ausdrücken.

Substituirt man die so für die X resultirenden Werthe in $(\beta.)$, so erhält man:

$$(\delta.) \quad U(x, r) = f(x) - \frac{r^2}{2^2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{r^4}{(2 \cdot 4)^2} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} - \\ - \frac{r^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \frac{d^6 f(x)}{dx^6} + \dots$$

Diese Reihe $(\delta.)$ aber ist summirbar durch ein bestimmtes Integral. Es ergibt sich nämlich aus $(\delta.)$:

$$(\varepsilon.) \quad U(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \sqrt{-1} \cdot r \cos \psi) d\psi,$$

wo unter $f(x + \sqrt{-1} \cdot r \cos \psi)$ derjenige Werth zu verstehen ist, den $f(x)$ annimmt, sobald man daselbst x mit $(x + \sqrt{-1} \cdot r \cos \psi)$ vertauscht. Dass die Formel $(\varepsilon.)$ mit $(\delta.)$ übereinstimmt, kann man leicht dadurch nachweisen, dass man den in $(\varepsilon.)$ unter dem Integralzeichen befindlichen Ausdruck [mittelst des Taylor'schen Satzes] nach Potenzen von $r \cos \psi$ entwickelt, und sodann die Integration nach ψ wirklich ausführt.

Die Uebertragung des Resultates $(\varepsilon.)$ auf den von uns betrachteten Fall liefert folgenden Satz:

Ist $f(\varrho)$ bekannt, so wird das Potential U in irgend einem beliebigen innerhalb A gelegenen Punkte $i(\varrho, \mu)$ folgenden Werth besitzen:

$$(\zeta.) \quad U_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\varrho + \sqrt{-1} \frac{\varrho \sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \cos \psi\right) d\psi,$$

wo der unter dem Integralzeichen in $d\psi$ multiplicirte Ausdruck denjenigen Werth vorstellt, welchen das gegebene $f(\varrho)$ annimmt, sobald man daselbst ϱ mit $\left(\varrho + \sqrt{-1} \frac{e\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \cos \psi\right)$ vertauscht.

§ 12.

Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln, die sehr weit von einander entfernt, und durch einen dünnen Draht mit einander verbunden sind.

Der Verbindungsdraht der beiden Kugeln mag *geradlinig* sein, so dass seine Länge also, falls man an den bisherigen Bezeichnungen*) festhält, $= (C - A - B)$ ist. Denkt man sich nun den aus den beiden Kugeln und diesem Draht bestehenden *Conductor* isolirt, und demselben eine gegebene Elektricitätsmenge M mitgetheilt, und diejenigen *Theile* von M , welche, nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, auf den beiden Kugeln sich vorfinden, mit A und B bezeichnet, so ergibt sich:

$$(1.) \quad A + B + 2\pi r \int_{x=A}^{x=C-B} \varepsilon dx = M,$$

wo r den Radius des Drahtes, und ε die Dichtigkeit der auf der Drahtoberfläche vorhandenen elektrischen Belegung vorstellen.



Bezeichnet man ferner den, nach Eintritt des Gleichgewichts, innerhalb des Conductors vorhandenen *constanten Potentialwerth* mit G , so ist:

$$(2.) \quad U_i + V_i + W_i = G,$$

wo i jeden beliebigen Punkt *innerhalb* des Conductors vorstellt, und wo U_i , V_i und W_i die von den beiden Kugeln und dem Draht auf i

*) Es sollen nämlich (wie bisher) a , b die *Centra* der beiden Kugeln, ferner A , B ihre *Radien*, und C ihre *Centraldistanz* vorstellen.

ausgeübten Potentiale repräsentiren. Versetzt man z. B. den Punkt i in das Centrum a , so wird:

$$U_a + V_a + W_a = G.$$

Zufolge des Satzes (7.) pg. 280 ist aber $U_a = \frac{A}{A}$. Und andererseits wird V_a , weil der Draht *sehr lang* sein soll, denselben Werth haben, als wäre die Elektrizitätsmenge B im Centrum b concentrirt, mithin $= \frac{B}{C}$ sein; so dass also die letzte Formel die Gestalt erhält:

$$(2a.) \quad \frac{A}{A} + \frac{B}{C} + 2\pi r \int_{x=A}^{x=C-B} \frac{\varepsilon dx}{x} = G,$$

wo x den Abstand des Drahtelementes dx vom Centrum a bezeichnet. Lässt man ferner in (2.) den Punkt i nach b rücken, so erhält man in analoger Weise:

$$(2b.) \quad \frac{A}{C} + \frac{B}{B} + 2\pi r \int_{x=A}^{x=C-B} \frac{\varepsilon dx}{C-x} = G.$$

Betrachtet man nun den Radius r des Verbindungsdrahtes als *ausserordentlich klein*, und setzt man (was allerdings noch des Beweises bedürfen würde) voraus, dass das Produkt $r\varepsilon$ alsdann ebenfalls *ausserordentlich klein*, mithin zu *vernachlässigen* sei, so reduciren sich die Formeln (1.), (2a.), (2b.) auf:

$$(3.) \quad \begin{aligned} A + B &= M, \\ \frac{A}{A} + \frac{B}{C} &= G, \\ \frac{A}{C} + \frac{B}{B} &= G. \end{aligned}$$

Mittelst dieser drei Gleichungen bestimmen sich A , B , M als Functionen von A , B , C , G ; und zwar ergiebt sich:

$$(4.) \quad \begin{aligned} \frac{A}{M} &= \frac{A(C-B)}{(A+B)C-2AB}, \\ \frac{B}{M} &= \frac{B(C-A)}{(A+B)C-2AB}, \end{aligned}$$

oder, weil der Draht *sehr lang*, mithin C *sehr gross* im Vergleich zu A und B ist:

$$(5.) \quad \begin{aligned} \frac{A}{M} &= \frac{A}{A+B}, \\ \frac{B}{M} &= \frac{B}{A+B}; \end{aligned}$$

so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Auf zwei sehr weit von einander entfernten und durch einen dünnen Draht verbundenen Kugeln vertheilt sich die Elektrizität nicht im Ver-

hältniss ihrer Oberflächen, sondern vielmehr im Verhältniss ihrer Radien.

Wir wollen jetzt die Gleichungen (3.) anwenden auf irgend eine an der Erdoberfläche aufgestellte *Metallkugel* A, und daneben auf die *Erdkugel* selber, welche B heissen mag. Alsdann nehmen jene Gleichungen (3.) die Gestalt an:

$$(f.) \quad A + B = M,$$

$$(g.) \quad \frac{A}{A} + \frac{B}{B+D} = G,$$

$$(h.) \quad \frac{A}{B+D} + \frac{B}{B} = G,$$

wo *B* den *Erdradius*, und *D* den Abstand des Centrums *a* der Kugel A von der *Erdoberfläche* vorstellen. Da nun *B* äusserst gross gegen *D* ist, so verwandelt sich die Formel (h.) in:

$$(j.) \quad \frac{A+B}{B} = G;$$

woraus mit Rücksicht auf (f.) folgt:

$$(k.) \quad \frac{M}{B} = G.$$

Da nun aber *B* sehr gross ist, so folgt aus (k.), dass

$$(l.) \quad G \text{ nahezu} = 0$$

ist, so dass wir also zu folgendem Resultate gelangen:

Wird eine elektrisch geladene Metallkugel mit der Erde in leitende Verbindung gebracht, so wird der constante Potentialwerth innerhalb der Kugel nahezu = 0 sein.

Dieser Satz steht im Einklang mit den Betrachtungen auf pg. 159. Auch ist derselbe, wie man leicht übersieht, ausdehnbar auf einen Conductor von beliebiger Gestalt. Denn denkt man sich einen solchen Conductor, auf den überdies von Aussen her irgend welche elektrische Massenpunkte einwirken mögen, mit der Erde in leitender Verbindung, so wird der constante Potentialwerth innerhalb des Conductors identisch sein mit demjenigen Werthe, den das Potential im Mittelpunkte der Erde hat. Letzterer aber wird dadurch erhalten werden, dass man die Summe aller überhaupt in Betracht kommender elektrischer Massen durch den Erdradius dividirt, und wird daher, weil der Erdradius ausserordentlich gross ist, nahezu = 0 sein.

Dass die Betrachtungen dieses letzten Paragraphs einigermassen *unsicher*, und jedenfalls nur *approximativ* sind, liegt in der Natur der Sache, und bedarf wohl keiner weiteren Entschuldigung.

Dreizehntes Capitel*).

Die Kugelfunctionen zweiter Art.

Wir haben in den vorhergehenden Capiteln die Probleme der elektrischen Vertheilung, des stationären Temperaturzustandes und des stationären elektrischen Strömungszustandes mehr oder weniger ausführlich behandelt. Insbesondere haben wir für den Fall der *Kugel* die Lösungen dieser Probleme wirklich hingestellt, indem wir dabei Gebrauch machten von derjenigen Entwicklung, die für die reciproke Entfernung zweier Punkte, unter Zugrundelegung der *Polarcoordinaten*, schon früher (im dritten und vierten Capitel) von uns gefunden war.

Wollen wir also — und dies ist das eigentliche Ziel unserer weiteren Betrachtungen — die Lösung der genannten Probleme für das *Ellipsoid*, insbesondere für das *Rotationsellipsoid* unternehmen, und dabei ein einigermassen analoges Verfahren einzuschlagen suchen, so wird in erster Linie wiederum nach einer Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Punkte, aber für *den* Fall zu trachten sein, dass die beiden Punkte nicht durch ihre Polarcoordinaten, sondern durch ihre *elliptischen Coordinaten* gegeben sind.

Eine derartige Entwicklung ist im Jahre 1847 von *F. Neumann***) wirklich gefunden worden. Dieselbe ist im Ganzen von einfacher und

*) Dieses Capitel und die beiden folgenden Capitel sind vom Herausgeber hinzugefügt. Wenn dieselben aber auch den *F. Neumann'schen Vorlesungen* nicht unmittelbar zugehören, so sind sie doch als eine aus den *F. Neumann'schen Arbeiten* sich ergebende Vervollständigung dieser Vorlesungen anzusehen. Es beruhen nämlich die in Rede stehenden drei Capitel auf folgenden Abhandlungen:

F. Neumann: Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte in eine Reihe, welche nach den Laplace'schen Ypsilons fortschreitet; und Anwendung dieser Reihe zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotationsellipsoids, welcher durch vertheilende Kräfte erregt ist. Crelle's Journal, Bd. 37. 1847.

F. Neumann: Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. Erste und zweite Abhandlung. Erschienen im Teubner'schen Verlag. 1878.

**) In der schon citirten Abhandlung von 1847.

übersichtlicher Gestalt, involvirt aber nicht nur die Kugelfunction $P_n(\mu)$, sondern daneben noch eine gewisse zweite Function $Q_n(\mu)$, welche derselben Differentialgleichung wie $P_n(\mu)$ Genüge leistet. Diese Function $Q_n(\mu)$, die sogenannte *Kugelfunction zweiter Art*, welche von F. Neumann durch die elegante Formel

$$Q_n(\mu) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\sigma) d\sigma}{\mu - \sigma}$$

definiert worden ist, soll im gegenwärtigen Capitel einer genaueren Betrachtung unterworfen werden.

Dabei ist zu erwähnen, dass die Function $Q_n(\mu)$, wenn auch in complicirter Gestalt, schon *vor* F. Neumann von *Heine* in dieses Gebiet von Untersuchungen eingeführt worden war, zur Absolvirung einer verwandten Aufgabe. Nachdem nämlich das Problem des stationären Temperaturzustandes im Jahre 1839 durch *Lamé's* berühmte Abhandlungen für den *Innenraum* eines Ellipsoids, namentlich eines Rotationsellipsoids gelöst war, lag es nahe, die Lösung dieses Problems auch für den *Aussenraum* des Rotationsellipsoids zu unternehmen. Und hierbei gelangte *Heine**) im Jahre 1843 zu einer Reihenentwicklung, die mit jener Function $Q_n(\mu)$ behaftet ist.

§ 1.

Einführung der Kugelfunction zweiter Art $Q_n(\mu)$.

Nach (10.) p. 29 ist

$$(A.) \quad \begin{aligned} P_0 &= P_0(\mu) = 1 \\ P_1 &= P_1(\mu) = \mu, \\ P_2 &= P_2(\mu) = \frac{3\mu^2 - 1}{2}, \\ P_3 &= P_3(\mu) = \frac{5\mu^3 - 3\mu}{2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach μ :

$$\begin{aligned} P_1' &= 1, \\ P_3' &= \frac{15\mu^2 - 3}{2}, \end{aligned}$$

folglich:
$$P_3' - P_1' = \frac{15\mu^2 - 5}{2},$$

*) *Heine*: Ueber einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen. 1843. Crelle's Journal, Bd. 26. Uebrigens ist (was hier nicht weiter in Betracht kommt) bei Aufgaben ganz anderer Art die Function $Q_n(\mu)$ schon im Jahre 1814 von *Gauss* (in seiner *Methodus nova*) zum Gegenstande der Untersuchung gemacht worden. Man vgl. *Heine's* Handbuch, erste Auflage, pg. 85.

also mit Rückblick auf (A.):

$$P_3' - P_1' = 5P_2.$$

In analoger Weise findet man:

$$P_4' - P_2' = 7P_3,$$

$$P_5' - P_3' = 9P_4,$$

etc. etc.,

mithin allgemein:

$$(B.) \quad P_{n+1}' - P_{n-1}' = (2n + 1)P_n.$$

Auf Grund dieser *einfachen allgemeinen Formel* (B.) ergeben sich, unter Hinzufügung der aus (A.) entspringenden Relationen $P_0' = 0$ und $P_1' = P_0$, folgende beiden Tabellen:

$P_0' = 0,$	$P_1' = 1P_0,$
$P_2' - P_0' = 3P_1,$	$P_3' - P_1' = 5P_2,$
$P_4' - P_2' = 7P_3,$	$P_5' - P_3' = 9P_4,$
$P_6' - P_4' = 11P_5,$	$P_7' - P_5' = 13P_6.$

Aus der Tabelle *links* folgt durch Addition:

$$(C.) \quad P_6' = 11P_5 + 7P_3 + 3P_1.$$

Desgleichen folgt aus der Tabelle *rechts*:

$$(D.) \quad P_7' = 13P_6 + 9P_4 + 5P_2 + 1P_0.$$

Der Anblick dieser Formeln (C.), (D.) führt aber sofort zu folgender allgemeinen Formel:

$$(E.) \quad P_n' = (2n - 1)P_{n-1} + (2n - 5)P_{n-3} + (2n - 9)P_{n-5} \cdots \\ \cdots + (2\lambda + 1)P_\lambda,$$

wo $\lambda = 1$ oder $= 0$ sein wird, jenachdem die Zahl n gerade oder ungerade ist.

Dies vorausgeschickt, gehen wir über zu unserm eigentlichen Gegenstande, nämlich zur genauern Untersuchung der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1.) \quad n(n + 1)f + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = 0.$$

Eine particulare Lösung dieser Gleichung ist [vgl. pg. 34] dargestellt durch die Function $f = P_n(\mu)$. Wir stellen uns die Aufgabe, die *zweite* particulare Lösung derselben zu finden.

Zu diesem Zwecke wollen wir die Function betrachten:

$$(2.) \quad F = F(\mu) = \int_A^B \frac{P_n(\sigma) d\sigma}{\mu - \sigma},$$

und untersuchen, ob die constanten Grenzen A und B vielleicht in solcher Weise bestimmbar sind, dass diese Function F oder $F(\mu)$ der Differentialgleichung (1.) Genüge leistet.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(3.) \quad U = \frac{1}{\mu - \sigma},$$

so findet, wie leicht zu verificiren ist, die *identische* Gleichung statt:

$$(4.) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial U}{\partial \mu} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left((1 - \sigma^2) \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right).$$

Gleichzeitig geht alsdann die Formel (2.) über in:

$$F = F(\mu) = \int_A^B U P_n(\sigma) d\sigma;$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} n(n+1)F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) \\ = \int_A^B \left\{ n(n+1)U + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial U}{\partial \mu} \right) \right\} P_n(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Diese letzte Formel aber kann, weil der in der geschweiften Klammer enthaltene Ausdruck, zufolge (4.), bei einer Vertauschung von μ mit σ *ungcändert* bleibt, auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} n(n+1)F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) \\ = \int_A^B \left\{ n(n+1)U + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left((1 - \sigma^2) \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right) \right\} P_n(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

oder, falls man die *identische* Gleichung*):

$$(h.) \quad 0 = \int_A^B \left\{ n(n+1)P_n(\sigma) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left((1 - \sigma^2) \frac{\partial P_n(\sigma)}{\partial \sigma} \right) \right\} U d\sigma$$

in Abzug bringt, auch so:

$$(5.) \quad n(n+1)F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) = \int_A^B \left\{ -2\sigma V + (1 - \sigma^2) \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right\} d\sigma,$$

wo V die Bedeutung hat:

$$(5a.) \quad V = P_n(\sigma) \frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial P_n(\sigma)}{\partial \sigma}.$$

*) Substituirt man in (1.) für f die Function $P_n(\mu)$, so erhält man offenbar eine Gleichung, welche *identisch* ist, und welche *identisch bleiben* wird, wenn man in ihr nachträglich den Buchstaben μ durch irgend einen *andern* Buchstaben, z. B. durch σ ersetzt. Folglich ist der in (h.) in der geschweiften Klammer enthaltene Ausdruck *identisch* = 0, mithin die Gleichung (h.) selber eine *identische* Gleichung.
— Q. e. d.

Aus (5.) folgt sofort:

$$n(n+1)F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) = \int_A^B \frac{\partial((1-\sigma^2)V)}{\partial \sigma} d\sigma,$$

d. i.

$$(6.) \quad n(n+1)F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) = \left[(1-\sigma^2)V \right]_{\sigma=A}^{\sigma=B}.$$

Die rechte Seite dieser Formel verschwindet aber, falls man $A = -1$ und $B = +1$ macht. Somit erkennen wir aus dieser letzten Formel, dass die Function F der Differentialgleichung (1.) Genüge leisten wird, sobald man den beiden Constanten A, B die soeben genannten Werthe zuertheilt, und gelangen daher, indem wir die Function $F(\mu)$ fortan mit $Q_n(\mu)$ bezeichnen, zu folgendem

Satz. — Die Differentialgleichung

$$(7.) \quad n(n+1)f + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = 0$$

besitzt, ausser der particularen Lösung:

$$(8.) \quad P_n(\mu)$$

noch eine zweite particulare Lösung:

$$(9.) \quad Q_n(\mu) = - \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\sigma) d\sigma}{\mu - \sigma};$$

so dass also ihre vollständige Lösung lautet:

$$(10.) \quad A P_n(\mu) + B Q_n(\mu),$$

wo A und B willkürliche Constanten vorstellen.

Sowohl $P_n(\mu)$ wie auch $Q_n(\mu)$ pflegen als *Kugelfunctionen* bezeichnet zu werden. Zur Unterscheidung wird alsdann $P_n(\mu)$ eine *Kugelfunction erster*, hingegen $Q_n(\mu)$ eine *Kugelfunction zweiter Art* genannt.

Die Formel (9.) kann auch so geschrieben werden:

$$Q_n(\mu) = - \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\mu) - P_n(\sigma)}{\mu - \sigma} d\sigma + P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} \frac{d\sigma}{\mu - \sigma},$$

oder auch so:

$$(11.) \quad Q_n(\mu) = R_n(\mu) + P_n(\mu) \log \frac{\mu + 1}{\mu - 1},$$

wo alsdann $R_n(\mu)$ die Bedeutung hat:

$$(12.) \quad R_n(\mu) = - \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\mu) - P_n(\sigma)}{\mu - \sigma} d\sigma.$$

Setzt man in dieser letzten Formel die Zahl n der Reihe nach $= 0$,

1, 2, 3, etc., und beachtet man dabei die in (10.) pg. 29 angegebenen Werthe der Functionen P_0, P_1, P_2, P_3 , etc., so erhält man:

$$R_0(\mu) = 0,$$

$$R_1(\mu) = - \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\mu - \sigma}{\mu - \sigma} \right) d\sigma = -2,$$

$$(13.) \quad R_2(\mu) = - \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\mu^2 - \sigma^2}{\mu - \sigma} \right) d\sigma = -3\mu,$$

$$R_3(\mu) = - \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\mu^3 - \sigma^3}{\mu - \sigma} \right) d\sigma + \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\mu - \sigma}{\mu - \sigma} \right) d\sigma = -5\mu^2 + \frac{4}{3},$$

etc. etc. etc.

Allgemein ist nach (11.) pg. 30:

$$P_n(\mu) = A_n \mu^n + B_n \mu^{n-2} + C_n \mu^{n-4} \dots + L_n \mu^2, \quad (\lambda = 0, \text{ resp. } = 1).$$

Somit folgt aus (12.):

$$R_n(\mu) = -A_n \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\mu^n - \sigma^n}{\mu - \sigma} \right) d\sigma - B_n \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\mu^{n-2} - \sigma^{n-2}}{\mu - \sigma} \right) d\sigma - \text{etc.}$$

Führt man aber hier die Integrationen wirklich aus, nachdem zuvor für die eingeklammerten Ausdrücke die bekannten Werthe:

$$\frac{\mu^n - \sigma^n}{\mu - \sigma} = \mu^{n-1} + \mu^{n-2}\sigma + \mu^{n-3}\sigma^2 \dots + \sigma^{n-1},$$

$$\frac{\mu^{n-2} - \sigma^{n-2}}{\mu - \sigma} = \mu^{n-3} + \mu^{n-4}\sigma + \mu^{n-5}\sigma^2 \dots + \sigma^{n-3},$$

etc. etc. etc.

substituirt worden sind, und beachtet man dabei die Formeln:

$$\int_{-1}^{+1} \sigma d\sigma = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \sigma^3 d\sigma = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \sigma^5 d\sigma = 0, \quad \text{etc. etc.},$$

so erhält man für $R_n(\mu)$ einen Werth von folgender Gestalt:

$$(14.) \quad R_n(\mu) = \mathfrak{A}_n \mu^{n-1} + \mathfrak{B}_n \mu^{n-3} + \mathfrak{C}_n \mu^{n-5} \dots + \mathfrak{L}_n \mu^2,$$

wo $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{C}_n, \dots \mathfrak{L}_n$ constante Coefficienten vorstellen, und $\lambda = 0$ oder $= 1$ ist, jenachdem die Zahl $(n-1)$ gerade oder ungerade ist.

Bemerkung. — Nach (13.) pg. 30 ist

$$(\alpha.) \quad P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu).$$

Andererseits folgt aus der soeben erhaltenen Formel (14.):

$$(\beta.) \quad R_n(-\mu) = (-1)^{n+1} R_n(\mu).$$

Mit Rücksicht auf diese beiden Relationen $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ ergibt sich jetzt aber aus (11.) die Relation:

$$(\gamma.) \quad Q_n(-\mu) = (-1)^{n+1} Q_n(\mu).$$

Wir sehen aus (14.), dass $R_n(\mu)$ eine ganze rationale Function $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades ist, und zwar eine gerade oder ungerade Function, jenachdem die Zahl $(n - 1)$ gerade oder ungerade. Auch könnten wir die in derselben enthaltenen constanten Coefficienten $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n$, etc. auf dem hier eingeschlagenen Wege leicht ermitteln. Ohne uns hierauf weiter einzulassen, wollen wir sofort übergehen zur Ableitung eines gewissen einfachen Satzes, der für jene Coefficienten gilt, und zur Berechnung derselben dienen kann.

Zu diesem Zweck sei zuvörderst bemerkt, dass

$$(15.) \quad Q_n(\infty) = 0$$

ist; wie sich solches aus der Formel (9.) sofort ergibt. Nun ist nach (11.):

$$(16.) \quad Q_n(\mu) = R_n(\mu) + P_n(\mu) \log \frac{\mu + 1}{\mu - 1},$$

also z. B.:

$$Q_2(\mu) = R_2(\mu) + P_2(\mu) \log \frac{\mu + 1}{\mu - 1},$$

oder, falls man für $R_2(\mu)$ den aus (14.) entspringenden Werth: $R_2(\mu) = \mathfrak{A}_2\mu$, und überdies für $P_2(\mu)$ den Werth (10.) pg. 29 substituirt:

$$Q_2(\mu) = \mathfrak{A}_2\mu + \frac{3\mu^2 - 1}{2} \log \frac{\mu + 1}{\mu - 1},$$

oder, falls man den log. nach fallenden Potenzen von μ entwickelt:

$$Q_2(\mu) = \mathfrak{A}_2\mu + (3\mu^2 - 1) \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{3\mu^3} + \frac{1}{5\mu^5} + \dots \right),$$

oder, falls man den ganzen Ausdruck nach Potenzen von μ ordnet:

$$(17.) \quad Q_2(\mu) = \mathfrak{A}_2\mu + 3\mu + \frac{\alpha}{\mu} + \frac{\beta}{\mu^3} + \frac{\gamma}{\mu^5} + \frac{\delta}{\mu^7} + \dots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. Zahlen sind, auf deren Werthe es hier nicht weiter ankommt. Dieser Ausdruck (17.) soll nun aber, zufolge der allgemeinen Formel (15.), für $\mu = \infty$ verschwinden. Und hieraus folgt sofort, dass $\mathfrak{A}_2 = -3$ sein muss.

Wir haben hier also gezeigt, wie man, auf Grund der allgemeinen Formel (15.), die in dem Ausdruck

$$R_2(\mu) = \mathfrak{A}_2\mu$$

enthaltene Constante \mathfrak{A}_2 zu bestimmen vermag. In analoger Weise wird man offenbar, auf Grund jener Formel, auch die in dem Ausdruck

$$R_3(\mu) = \mathfrak{A}_3\mu^2 + \mathfrak{B}_3\mu$$

enthaltenen Constanten $\mathfrak{A}_3, \mathfrak{B}_3$ zu bestimmen im Stande sein. U. s. w. Kurz, man gelangt zu folgendem

Satz. — Die Function $R_n(\mu)$ kann definiert werden als diejenige ganze rationale Function von μ , welche zu der Function:

$$(18.) \quad P_n(\mu) \log \frac{\mu + 1}{\mu - 1}$$

hinzuaddirt werden muss, damit die so entstehende Summe für $\mu = \infty$ verschwindet.

Will man die Function $R_n(\mu)$ in wirklich fertiger und zugleich einfacher Gestalt vor sich haben, so empfiehlt es sich, dieselbe nach Kugelfunctionen, nämlich nach den Functionen P_0, P_1, P_2 , etc. zu entwickeln. Dass solches möglich ist, übersieht man leicht. So z. B. ist nach (14.):

$$R_5(\mu) = \mathfrak{A}_5 \mu^4 + \mathfrak{B}_5 \mu^2 + \mathfrak{C}_5 \mu^0.$$

Substituirt man aber hier die in (2.) pg. 80 angedeuteten Werthe:

$$\mu^0 = P_0(\mu),$$

$$\mu^2 = \alpha P_0(\mu) + \beta P_2(\mu),$$

$$\mu^4 = \gamma P_0(\mu) + \delta P_2(\mu) + \varepsilon P_4(\mu),$$

so erhält man:

$$R_5(\mu) = A P_4(\mu) + B P_2(\mu) + \Gamma P_0(\mu),$$

wo A, B, Γ bestimmte Zahlen sind. — Q. e. d.

Analog mit dieser letzten Formel wird offenbar der Werth von $R_n(\mu)$ folgendermassen darstellbar sein:

$$(19.) \quad R_n(\mu) = A P_{n-1}(\mu) + B P_{n-3}(\mu) + \Gamma P_{n-5}(\mu) \cdots + \Lambda P_\lambda(\mu),$$

wo $\lambda = 0$, resp. $= 1$ ist; und es handelt sich also nur noch darum, die hier auftretenden Constanten A, B, $\Gamma, \dots \Lambda$ wirklich zu berechnen.

Zu diesem Zwecke benutzen wir die Differentialgleichung (1.):

$$(20.) \quad [f] = n(n+1)f - 2\mu f' + (1 - \mu^2)f'' = 0.$$

Die beiden particularen Lösungen dieser Gleichung sind [vgl. den Satz pg. 314] $P_n(\mu)$ und $Q_n(\mu)$. Der auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck, welcher kurzweg mit $[f]$ bezeichnet sein soll, wird daher, falls man in ihm die Function f durch $P_n(\mu)$ oder durch $Q_n(\mu)$ ersetzt, *identisch verschwinden*; was angedeutet werden kann durch die Formeln:

$$(21.) \quad [P_n(\mu)] = 0 \quad \text{und} \quad [Q_n(\mu)] = 0.$$

Die letzte Formel erhält, falls man für $Q_n(\mu)$ den Werth (11.) einsetzt, die Gestalt:

$$[R_n(\mu)] + [P_n(\mu) \log(\mu + 1)] - [P_n(\mu) \log(\mu - 1)] = 0,$$

oder, falls man für $R_n(\mu)$ den Werth (19.) eintreten lässt, folgende Gestalt:

$$(22.) \quad \left\{ \begin{aligned} &+ [P_n(\mu) \log(\mu + 1)] - [P_n(\mu) \log(\mu - 1)] \\ &+ A[P_{n-1}(\mu)] + B[P_{n-3}(\mu)] + \Gamma[P_{n-5}(\mu)] + \dots \end{aligned} \right\} = 0.$$

Mittelst dieser Gleichung (22.), welche, ebenso wie die beiden Gleichungen (21.), in Bezug auf μ eine *identische* sein muss, wollen wir nun die unbekannten Constanten A, B, Γ , ... Λ zu ermitteln suchen.

Um die einzelnen Glieder der Gleichung (22.) wirklich zu bilden, benutzen wir zuvörderst die Gleichung (4.) pg. 34. Dieselbe lautet, falls man q für n setzt:

$$q(q+1)P_q(\mu) - 2\mu P_q'(\mu) + (1 - \mu^2)P_q''(\mu) = 0,$$

und kann daher auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} n(n+1)P_q(\mu) - 2\mu P_q'(\mu) + (1 - \mu^2)P_q''(\mu) \\ = (n(n+1) - q(q+1))P_q(\mu). \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser letzten Gleichung ist aber [vgl. (20.)] nichts Anderes als $[P_q(\mu)]$. Somit folgt:

$$[P_q(\mu)] = (n(n+1) - q(q+1))P_q(\mu),$$

oder, was dasselbe ist:

$$[P_q(\mu)] = (n - q)(n + q + 1)P_q(\mu).$$

Hieraus ergeben sich für $q = (n - 1), (n - 3), (n - 5)$, etc. die Formeln:

$$\begin{aligned} (a.) \quad [P_{n-1}(\mu)] &= 1 \cdot 2n P_{n-1}(\mu), \\ [P_{n-3}(\mu)] &= 3(2n - 2) P_{n-3}(\mu), \\ [P_{n-5}(\mu)] &= 5(2n - 4) P_{n-5}(\mu), \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Bildet man ferner den in (20.) definirten Ausdruck $[f]$ für die Function $f = P_n(\mu) \log(\mu + 1)$, und berücksichtigt man dabei die für $P_n(\mu)$ geltende Differentialgleichung (4.) pg. 34, so erhält man nach einfacher Rechnung:

$$(\beta.) \quad [P_n(\mu) \log(\mu + 1)] = -P_n(\mu) - (2\mu - 2)P_n'(\mu);$$

desgleichen findet man:

$$(\gamma.) \quad [P_n(\mu) \log(\mu - 1)] = -P_n(\mu) - (2\mu + 2)P_n'(\mu).$$

Die identisch zu erfüllende Gleichung (22.) gewinnt durch Substitution der Werthe (a.), (b.), (c.) die Gestalt:

$$\left\{ \begin{aligned} &+ 4P_n'(\mu) \\ &+ 1 \cdot 2n A P_{n-1}(\mu) + 3(2n - 2) B P_{n-3}(\mu) \\ &\quad + 5(2n - 4) \Gamma P_{n-5}(\mu) + \dots \end{aligned} \right\} = 0,$$

oder, falls man für $P_n'(\mu)$ den Werth (E.) pg. 312 einsetzt, folgende Gestalt:

$$\left\{ \begin{aligned} &4 \left((2n-1) P_{n-1}(\mu) + (2n-5) P_{n-3}(\mu) \right. \\ &\quad \left. + (2n-9) P_{n-5}(\mu) + \dots \right) \\ &+ 1 \cdot 2n A P_{n-1}(\mu) + 3(2n-2) B P_{n-3}(\mu) \\ &\quad \left. + 5(2n-4) \Gamma P_{n-5}(\mu) + \dots \right\} = 0. \end{aligned}$$

Und hieraus folgt sofort [vgl. die Zusätze pg. 60]:

$$A = -4 \frac{2n-1}{1 \cdot 2n},$$

$$B = -4 \frac{2n-5}{3(2n-2)},$$

$$\Gamma = -4 \frac{2n-9}{5(2n-4)},$$

etc. etc.

Demgemäss ergibt sich also aus (19.) für die Function $R_n(\mu)$ die elegante Darstellung:

$$(23.) \quad R_n(\mu) = -4 \left(\frac{2n-1}{1 \cdot 2n} P_{n-1}(\mu) + \frac{2n-5}{3(2n-2)} P_{n-3}(\mu) + \frac{2n-9}{5(2n-4)} P_{n-5}(\mu) + \dots \right),$$

die Reihe soweit fortgesetzt gedacht, als die Indices der P 's positiv bleiben. Hieraus erhält man z. B. für die Functionen $R_0(\mu)$, $R_1(\mu)$, $R_2(\mu)$, $R_3(\mu)$, unter Wiederholung ihrer schon in (13.) genannten Werthe, folgende Ausdrücke:

$$(24.) \quad \begin{aligned} R_0(\mu) &= 0 &= 0, \\ R_1(\mu) &= -2 &= -4 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} P_0(\mu) \right), \\ R_2(\mu) &= -3\mu &= -4 \left(\frac{3}{1 \cdot 4} P_1(\mu) \right), \\ R_3(\mu) &= -5\mu^2 + \frac{4}{3} &= -4 \left(\frac{5}{1 \cdot 6} P_2(\mu) + \frac{1}{3 \cdot 4} P_0(\mu) \right). \end{aligned}$$

Dass diese beiderlei Werthe der Functionen unter einander *identisch* sind, erkennt man leicht, falls man nur für $P_0(\mu)$, $P_1(\mu)$, $P_2(\mu)$ die Werthe (10.) pg. 29 substituirt.

Um die Hauptsache hervorzuheben. — Die durch die Formel (9.) definirte Function $Q_n(\mu)$ ist in die Gestalt (11.) versetzbar:

$$(25.) \quad Q_n(\mu) = R_n(\mu) + P_n(\mu) \log \frac{\mu+1}{\mu-1}.$$

Und die hier auftretende Function $R_n(\mu)$ ist eine ganze rationale Function von μ von der Form (14.), welche dem Satze (18.) unterliegt, und welche, durch Entwicklung nach den $P_h(\mu)$, in die besonders ein-

fache und elegante Gestalt (23.) versetzt werden kann. Beispielsweise sind in (24.) die Werthe von $R_0(\mu)$, $R_1(\mu)$, $R_2(\mu)$ und $R_3(\mu)$ in vollständig fertiger Weise hingestellt.

§ 2.

Weiteres über die Function $Q_n(\mu)$.

Nach der ursprünglichen Definition (9.) pg. 314 ist:

$$(1.) \quad Q_n(\mu) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\sigma) d\sigma}{\mu - \sigma}.$$

Bei Ausführung dieser Integration wird σ von -1 zu $+1$ gehen, mithin $\text{mod } \sigma \leq 1$ bleiben. Beschränkt man sich also auf solche Werthe von μ , für welche

$$(2.) \quad \text{mod } \mu > 1$$

ist, so wird $\text{mod } \mu$ bei Ausführung jener Integration stets $> \text{mod } \sigma$, mithin $\frac{1}{\mu - \sigma}$ nach steigenden Potenzen von σ entwickelbar sein:

$$\frac{1}{\mu - \sigma} = \frac{1}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu^2} + \frac{\sigma^2}{\mu^3} + \frac{\sigma^3}{\mu^4} + \dots$$

Dies in (1.) substituirt, ergibt sich:

$$Q_n(\mu) = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu^2} + \frac{\sigma^2}{\mu^3} + \dots \right) P_n(\sigma) d\sigma,$$

d. i.

$$(3.) \quad Q_n(\mu) = K_n^0 \left(\frac{1}{\mu} \right)^1 + K_n^1 \left(\frac{1}{\mu} \right)^2 + K_n^2 \left(\frac{1}{\mu} \right)^3 + K_n^3 \left(\frac{1}{\mu} \right)^4 + \dots,$$

wo alsdann die K 's [genau ebenso wie früher pg. 139] die Bedeutungen haben:

$$(4.) \quad K_n^q = \int_{-1}^{+1} \sigma^q P_n(\sigma) d\sigma.$$

Diese K 's sind aber, zufolge des Satzes (4.) pg. 80, 81, durchweg $= 0$, ausser wenn q mit einer der Zahlen

$$n, \quad n+2, \quad n+4, \quad n+6, \quad \text{etc. etc.}$$

coincidirt. Somit reducirt sich die Formel (3.) auf:

$$Q_n(\mu) = K_n^n \left(\frac{1}{\mu} \right)^{n+1} + K_n^{n+2} \left(\frac{1}{\mu} \right)^{n+3} + K_n^{n+4} \left(\frac{1}{\mu} \right)^{n+5} + \dots$$

Und diese letzte Formel gewinnt, falls man zur augenblicklichen Abkürzung

$$\begin{aligned}
 (5.) \quad K_n^{n+2} &= K_n^n \kappa, \\
 K_n^{n+4} &= K_n^n \kappa', \\
 K_n^{n+6} &= K_n^n \kappa'', \\
 &\text{etc. etc.}
 \end{aligned}$$

setzt, folgende Gestalt:

$$(6.) \quad Q_n(\mu) = K_n^n \left(\frac{1}{\mu^{n+1}} + \frac{\kappa}{\mu^{n+3}} + \frac{\kappa'}{\mu^{n+5}} + \frac{\kappa''}{\mu^{n+7}} + \dots \right).$$

Es bleibt noch übrig, die hier auftretenden Constanten zu bestimmen. Zuvörderst ist nach (7.) pg. 82:

$$(7.) \quad K_n^n = \frac{2^{n+1} \Pi^2(n)}{\Pi(2n+1)}.$$

Was ferner die Bestimmung von κ , κ' , κ'' , ... betrifft, so kann man von dem Umstande Gebrauch machen, dass $Q_n(\mu)$ der Differentialgleichung (7.) pg. 314:

$$n(n+1)f - 2\mu f' + (1 - \mu^2)f'' = 0$$

Gentüge leistet. Substituirt man nämlich die Function $Q_n(\mu)$, d. i. die Reihe (6.) in diese Gleichung, so erhält man:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &0 + \frac{(n+1)(n+2)}{\mu^{n+3}} \\
 &+ \kappa \left(-\frac{2(2n+3)}{\mu^{n+3}} + \frac{(n+3)(n+4)}{\mu^{n+5}} \right) \\
 &+ \kappa' \left(-\frac{4(2n+5)}{\mu^{n+5}} + \frac{(n+5)(n+6)}{\mu^{n+7}} \right) \\
 &+ \kappa'' \left(-\frac{6(2n+7)}{\mu^{n+7}} + \frac{(n+7)(n+8)}{\mu^{n+9}} \right) \\
 &+ \text{etc. etc.}
 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Da diese Gleichung, abgesehen von der Beschränkung (2.), für beliebige Werthe der Variablen μ stattfinden soll, so müssen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von μ einzeln = 0 sein. Demgemäss ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (8.) \quad \kappa &= \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}, \\
 \kappa' &= \frac{(n+3)(n+4)}{4(2n+5)} \kappa, \\
 \kappa'' &= \frac{(n+5)(n+6)}{6(2n+7)} \kappa', \\
 &\text{etc. etc.}
 \end{aligned}$$

Substituirt man schliesslich die Werthe (7.), (8.) in (6.), so erhält man die definitive Formel:

$$(9.) \quad Q_n(\mu) = \frac{2^{n+1} \Pi^2(n)}{\Pi(2n+1)} \left[\frac{1}{\mu^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} \frac{1}{\mu^{n+3}} \right. \\
+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} \frac{1}{\mu^{n+5}} \\
\left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \frac{1}{\mu^{n+7}} + \dots \text{in inf.} \right],$$

eine Formel, die stets gültig sein wird, falls die Bedingung $(2n+1) \bmod \mu > 1$ erfüllt bleibt.

Bemerkung. — Wir können diese Gelegenheit benutzen, um den früher [in (4.) pg. 80, 81] über die Integrale

$$(\alpha.) \quad K_n^q = \int_1^{+1} \sigma^q P_n(\sigma) d\sigma$$

aufgestellten Satz zu vervollständigen. Damals nämlich haben wir gefunden, dass das Integral K durchweg $= 0$ ist, ausser wenn q mit einer der Zahlen

$$(\beta.) \quad n, \quad n+2, \quad n+4, \quad n+6, \quad \text{etc. etc.}$$

coincidirt. Gegenwärtig können wir hinzufügen, dass das Integral K in diesen Ausnahmefällen folgende Werthe besitzt:

$$K_n^n = \frac{2^{n+1} \Pi^2(n)}{\Pi(2n+1)} \\
K_n^{n+2} = K_n^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot (2n+3)}, \\
(\gamma.) \quad K_n^{n+4} = K_n^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)}, \\
K_n^{n+6} = K_n^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+3)(2n+5)(2n+7)}, \\
\text{etc. etc.};$$

wie sich solches auf Grund der Formeln (7.) und (5.), (8.) sofort ergibt.

§ 3.

Die derivirten Functionen $P_n^{(j)}$, $Q_n^{(j)}$ und die adjungirten Functionen P_{nj} , Q_{nj} .

Ebenso wie wir [vgl. (3.) pg. 70] von P_n ausgehend die *derivirte Function* $P_n^{(j)}$ und die *adjungirte Function* P_{nj} eingeführt haben:

$$(1.) \quad P_n^{(j)}(z) = \frac{d^j P_n(z)}{dz^j}, \quad P_{nj}(z) = (\sqrt{1-z^2})^j P_n^{(j)}(z),$$

ebenso wollen wir von Q_n ausgehend die entsprechenden Functionen $Q_n^{(j)}$ und Q_{nj} einführen, mittelst der Formeln:

$$(2.) \quad Q_n^{(j)}(z) = \frac{d^j Q_n(z)}{dz^j}, \quad Q_{nj}(z) = (\sqrt{1-z^2})^j Q_n^{(j)}(z).$$

Die Functionen $P_n(z)$ und $Q_n(z)$ genügen [Satz pg. 314] der Differentialgleichung:

$$(3.) \quad n(n+1)f + \frac{\partial}{\partial z} \left((1-z^2) \frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0.$$

Hieraus aber folgt durch Differentiation [wie früher pg. 35 gezeigt ist], dass die derivirten Functionen $P_n^{(j)}(z)$ und $Q_n^{(j)}(z)$ folgender Differentialgleichung Genüge leisten:

$$(4.) \quad (n-j)(n+j+1)F - (2j+2)z \frac{\partial F}{\partial z} + (1-z^2) \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

Diese Gleichung nimmt, falls man in ihr an Stelle von F eine etwas andere Function \mathfrak{F} einführt:

$$\mathfrak{F} = (\sqrt{1-z^2})^j F,$$

folgende Gestalt an:

$$(5.) \quad n(n+1)\mathfrak{F} + \frac{\partial}{\partial z} \left((1-z^2) \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right) - \frac{j^2 \mathfrak{F}}{1-z^2} = 0.$$

Demgemäss wird dieser letzten Gleichung Genüge geleistet werden durch

$$\mathfrak{F} = (\sqrt{1-z^2})^j P_n^{(j)}(z) \quad \text{und} \quad \mathfrak{F} = (\sqrt{1-z^2})^j Q_n^{(j)}(z)$$

d. i. [vgl. (1.), (2.)] durch

$$(6.) \quad \mathfrak{F} = P_{nj}(z) \quad \text{und} \quad \mathfrak{F} = Q_{nj}(z).$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$(7.) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left((1-z^2) \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right) = \delta_z \mathfrak{F}, \quad \text{und} \quad \frac{1}{1-z^2} = (z),$$

so gelangt man zu dem Resultate, dass, ebenso wie $P_n(z)$ und $Q_n(z)$ die beiden particularen Lösungen der Gleichung

$$(8.) \quad n(n+1)\mathfrak{F} + \delta_z \mathfrak{F} = 0$$

sind, ebenso $P_{nj}(z)$ und $Q_{nj}(z)$ die beiden particularen Lösungen folgender Differentialgleichung repräsentiren:

$$(9.) \quad n(n+1)\mathfrak{F} + \delta_z \mathfrak{F} - j^2(z)\mathfrak{F} = 0.$$

Ausser diesen Differentialgleichungen ist für unsere weiteren Untersuchungen noch von Wichtigkeit die Kenntniss derjenigen Specialwerthe, welche die in Rede stehenden Functionen für $z = \pm 1$ und

für $z = \infty$ annehmen. In Bezug hierauf gilt folgende Tabelle, deren Richtigkeit sofort erläutert werden soll:

(10.)

	$P_n(z)$	$P_{nj}(z)$ $j=1, 2, 3, \dots n$	$Q_n(z)$	$Q_{nj}(z)$ $j=1, 2, 3, \dots \infty$
$z=1$	1	0	∞	∞
$z=-1$	$(-1)^n$	0	∞	∞
$z=\infty$	∞ (resp. 1)	∞	0	0

Erläuterung. — Die Werthe von $P_n(z)$ für $z = \pm 1$ ergeben sich sofort aus (ξ), (η) pg. 32. Ferner ergibt sich aus (10.) pg. 29, dass für $z = \infty$ die Functionen $P_1(z)$, $P_2(z)$, $P_3(z)$, etc. durchweg $= \infty$ werden, dass hingegen $P_0(z)$ beständig $= 1$ ist, und diesen Werth 1 also auch beibehalten wird für $z = \infty$. Demgemäss ist in der Tabelle als Werth von $P_n(z)$ für $z = \infty$ angegeben: ∞ (resp. 1).

Die unter der Voraussetzung: $j=1, 2, 3, \dots n$ für $P_{nj}(z)$ aufgeführten Werthe ergeben sich sofort aus der Definition dieser Function in (1.), und mit Rücksicht darauf, dass $P_n(z)$ eine ganze rationale Function n^{ten} Grades ist.

Was ferner die Werthe von $Q_n(z)$ und $Q_{nj}(z)$ für $z=1$ betrifft, so ist nach (11.) pg. 314

$$Q_n(z) = R_n(z) + P_n(z) \log \frac{z+1}{z-1},$$

also:

$$Q_n(z) = -P_n(z) \log(z-1) + f, \quad \text{wo } f = P_n(z) \log(z+1) + R_n(z)$$

Berechnet man nun von hier aus, auf Grund der Formel (2.), die adjungirten Functionen $Q_{n1}(z)$, $Q_{n2}(z)$, etc., so erhält man:

$$Q_n(z) = -P_n(z) \log(z-1) + f,$$

$$Q_{n1}(z) = \left[\frac{P_n(z)}{1-z} - P_n'(z) \log(z-1) + f' \right] \sqrt{1-z^2},$$

$$Q_{n2}(z) = \left[\frac{P_n(z)}{(1-z)^2} + \frac{2P_n'(z)}{1-z} - P_n''(z) \log(z-1) + f'' \right] (\sqrt{1-z^2})^2,$$

etc. etc.

Fasst man aber in diesen Formeln jedesmal den Factor von $P_n(z)$ ins Auge, so erkennt man sofort, dass $Q_n(z)$, $Q_{n1}(z)$, $Q_{n2}(z)$, etc. für $z=1$ zu ∞ werden. Gleiches ist offenbar in analoger Weise für $z=-1$ nachweisbar.

Was endlich die Werthe von $Q_n(z)$, $Q_{nj}(z)$ für $z = \infty$ betrifft, so gilt nach (9.) pg. 322 für $\text{mod } z > 1$ die Formel:

$$Q_n(z) = \frac{A}{z^{n+1}} + \frac{B}{z^{n+3}} + \frac{C}{z^{n+5}} + \dots,$$

wo A , B , C , etc. Constanten sind. Hieraus folgt z. B.:

$$Q_{n1}(z) = \left(-\frac{(n+1)A}{z^{n+2}} - \frac{(n+3)B}{z^{n+4}} - \frac{(n+5)C}{z^{n+6}} - \dots \right) \sqrt{1-z^2},$$

$$Q_{n2}(z) = \left(+\frac{n+1}{z^{n+3}} + \frac{n+2}{z^{n+5}} + \frac{(n+3)(n+4)B}{z^{n+7}} + \dots \right) (\sqrt{1-z^2})^2,$$

etc. etc.

Und aus diesen Formeln erkennt man sofort, dass $Q_n(z)$, $Q_{n1}(z)$, $Q_{n2}(z)$, etc. für $z = \infty$ durchweg zu 0 werden. — *Q. e. d.*

Bemerkung. — Wir können nachträglich den Hauptinhalt der Tabelle (10.) in folgende kürzere Tabelle zusammenfassen:

(10a.)

	$P_{nj}(z)$ $j=0, 1, 2, 3, \dots n$	$Q_{nj}(z)$ $j=0, 1, 2, 3, \dots \text{in inf.}$
$z = +1$	endlich	∞
$z = \infty$	$\neq 0$	0

Und diese kürzere Tabelle wird für unsere weiteren Zwecke *ausreichend* sein.

Zweite Bemerkung. — Setzt man in den Formeln (1.), (2.) die Zahl $j=0$, so erhält man:

$$(11.) \quad P_n^{(0)}(z) = P_{n0}(z) = P_n(z),$$

und ebenso:

$$(12.) \quad Q_n^{(0)}(z) = Q_{n0}(z) = Q_n(z);$$

Formeln, von denen häufig Gebrauch zu machen ist.

Vierzehntes Capitel.

Einführung der elliptischen Coordinaten.

Es handelt sich hier nicht nur um die Einführung der elliptischen Coordinaten, sondern namentlich auch um die Aufgabe, die reciproke Entfernung zweier Punkte, unter Anwendung der elliptischen Coordinaten, in eine Reihe zu entwickeln. Diese Entwicklung soll hier bewerkstelligt werden auf Grund der schon citirten *L. Neumann'schen* Abhandlung vom Jahre 1847*). — Dabei wird Gebrauch zu machen sein von dem Umstande, dass jene reciproke Entfernung der *Laplace'schen Differentialgleichung* Genüge leistet; und es wird daher diese Gleichung auf elliptische Coordinaten zu transformiren sein.

Die soeben genannte Transformation wird von uns bewerkstelligt werden auf Grund eines sehr eleganten, von *Jacobi* aus der Variationsrechnung hergeleiteten Satzes**). Uebrigens werden wir dabei Gelegenheit nehmen, diesen *Jacobi'schen Satz* zu *beweisen*, und zwar *ohne* Hülfe der Variationsrechnung, auf einem Wege, der sich an unsere früheren Betrachtungen in einfacher Weise anschliesst.

§ 1.

Die elliptischen Coordinaten ϱ , μ , φ .

Die Gleichungen:

$$\begin{aligned}x &= A \cos \vartheta, \\y &= B \sin \vartheta \cos \varphi, \\z &= B \sin \vartheta \sin \varphi\end{aligned}$$

repräsentiren bekanntlich, falls $A > B$ positive Constanten sind, die Oberfläche eines *gestreckten Rotationsellipsoids*. Und zwar wird man, um sämtliche Punkte dieser Oberfläche, und jeden nur einmal zu erhalten, *dem Winkel ϑ den Spielraum $0 \dots \pi$. und dem Winkel φ den Spielraum $0 \dots 2\pi$ zuzuertheilen haben.*

*) Vgl. pg. 310.

**) *Jacobi*: Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta V = 0$. Crelle's Journal. Bd. 36. 1848.

Die beiden Brennpunkte A und A' dieses Ellipsoids liegen auf der x -Axe im Abstände $a = \sqrt{A^2 - B^2}$ vom Anfangspunkte des Coordinatensystems. Demgemäss kann man die vorstehenden Gleichungen, indem man a statt B einführt, auch so schreiben:

$$\begin{aligned}x &= A \cos \vartheta, \\y &= \sqrt{A^2 - a^2} \sin \vartheta \cos \varphi, \\z &= \sqrt{A^2 - a^2} \sin \vartheta \sin \varphi.\end{aligned}$$

Will man die mit diesem Ellipsoid *confocalen Ellipsoide* erhalten, so hat man A , A' , mithin auch a festzuhalten, und A variiren zu lassen zwischen a und ∞ . Dabei wird man für $A = a$ das *kleinste* jener Ellipsoide, d. i. die *Brennlinie* AA' , und für $A = \infty$ das *grösste* derselben, d. i. eine um den Anfangspunkt mit unendlich grossem Radius beschriebene Kugelfläche erhalten. Führt man statt des Parameters A einen etwas andern Parameter ϱ ein, mittelst der Substitution $A = a\varrho$, so lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(1.) \quad x &= a\varrho \cos \vartheta, \\y &= a\sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \vartheta \cos \varphi, \\z &= a\sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \vartheta \sin \varphi.\end{aligned}$$

Und diese Gleichungen werden jetzt alle Flächen des in Rede stehenden confocalen Systems liefern, *sobald man ϱ variiren lässt zwischen 1 und ∞* , der Art, dass man für $\varrho = 1$ die Brennlinie AA' , und für $\varrho = \infty$ jene unendlich grosse Kugelfläche erhält.

Mittelst dieser Formeln (1.) sollen nun an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten (x, y, z) die neuen Coordinaten $(\varrho, \vartheta, \varphi)$ oder (ϱ, μ, φ) eingeführt werden, wo μ (ebenso wie früher) als Abbeviatur dient für $\cos \vartheta$. Um von den Werthen, welche ϱ und μ für die x -Axe und für die yz -Ebene besitzen, eine Vorstellung zu erhalten, diene das nachstehende Schema, in welchem die x -Axe *vertikal nach oben gerichtet* ist, und in welchem die auf dieser Axe liegenden Punkte A , A' die beiden Brennpunkte sein sollen.

Erläuterung des Schemas. — Denkt man sich irgend eine jener Ellipsoidflächen construiert, deren Brennpunkte in A , A' liegen, so wird [ebenso wie früher bei der Kugelfläche] im höchsten Punkte des Ellipsoids $\vartheta = 0$, im Aequator desselben $\vartheta = 90^\circ$ und im tiefsten Punkte desselben $\vartheta = 180^\circ$ sein. Mit andern Worten: Es wird an den genannten Stellen μ resp. $= 1$, $= 0$ und $= -1$ sein. In solcher Weise ergeben sich die in dem Schema den drei *starken* Linien beigesetzten Werthe von μ . Selbstverständlich ist dabei unter der *horizontalen* starken Linie die Aequatorebene zu verstehen.

Lässt man ferner das betrachtete Ellipsoid von der Brennlinie aus bis zur unendlich grossen Kugelfläche wachsen, so wird dabei sein Parameter ϱ von 1 bis ∞ zunehmen. In solcher Weise ergeben sich die in dem Schema den drei *starken* Linien beigesetzten Werthe von ϱ .

Was insbesondere das *kleinste* Ellipsoid d. i. die Brennlinie AA' betrifft, so ist für dasselbe $\varrho = 1$. Für alle Punkte (x, y, z) dieser Brennlinie AA' gelten also nach (1.) die Formeln:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \vartheta, \\ y &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Demgemäss wird ϑ im höchsten Punkte der Brennlinie $= 0$, und im tiefsten Punkte derselben $= 180^\circ$.

D. h. μ wird in diesem Punkte resp. $= +1$ und $= -1$. Kurz, es variiert μ für die Punkte der Brennlinie zwischen -1 und $+1$, während ϱ für all' diese Punkte constant, $= 1$ ist. So ergeben sich die im Schema der Brennlinie beigesetzten Werthe von ϱ und μ .

Insbesondere erkennt man, dass der Brennpunkt A die Coordinaten ($\varrho = 1, \mu = 1$), und der Brennpunkt A' die Coordinaten ($\varrho = 1, \mu = -1$) besitzt; wie ebenfalls im Schema notirt ist.

Ebenso wie durch die Gleichung $\varrho = \text{Const.}$ das System der betrachteten *confocalen Ellipsoidflächen* dargestellt ist, ebenso wird offenbar durch die Formel $\varphi = \text{Const.}$ das System der zugehörigen *Meridianebenen* repräsentirt. Es bleibt noch übrig, die Bedeutung der Gleichung $\mu = \text{Const.}$ zu ermitteln. Zu diesem Zwecke markire man irgendwo im Raume einen Punkt (x, y, z) und bezeichne die Abstände desselben von den beiden Brennpunkten A und A' respective mit E und E' . Alsdann ergibt sich [weil der Abstand der Punkte A, A' vom Anfangspunkte mit a bezeichnet ist]:

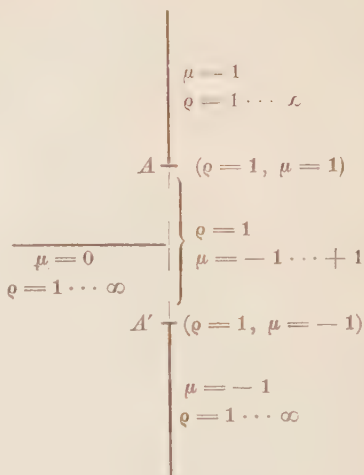
$$\begin{aligned} E^2 &= (x - a)^2 + y^2 + z^2, \\ E'^2 &= (x + a)^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

also, falls man für x, y, z die Werthe (1.) substituirt:

$$\begin{aligned} E^2 &= a^2[(\varrho \cos \vartheta - 1)^2 + (\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta], \\ E'^2 &= a^2[(\varrho \cos \vartheta + 1)^2 + (\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta], \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\begin{aligned} (2.) \quad E^2 &= a^2(\varrho - \cos \vartheta)^2 = a^2(\varrho - \mu)^2, \\ E'^2 &= a^2(\varrho + \cos \vartheta)^2 = a^2(\varrho + \mu)^2, \end{aligned}$$



folglich:

$$(3.) \quad \begin{aligned} E &= a(\varrho - \mu), \\ E' &= a(\varrho + \mu). \end{aligned}$$

Und zwar ist der Uebergang von (2.) zu (3.), auch was die *Vorzeichen* betrifft, ein völlig correcter; wie sich solches sofort ergibt, falls man nur beachtet, dass ϱ zwischen $1 \dots \infty$, andererseits μ zwischen $-1 \dots +1$ liegt, und dass also $(\varrho - \mu)$ und $(\varrho + \mu)$ stets *positiv* sind. Aus (3.) folgt sofort:

$$(4.) \quad \varrho = \frac{E' + E}{2a} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E' - E}{2a};$$

so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Für jedweden Punkt (ϱ, μ, φ) repräsentiren ϱ und μ die Summe und Differenz der beiden Brennstrahlen, diese Summe oder Differenz noch dividirt durch $2a$.

Aus diesem Satze ergibt sich einerseits, was schon bekannt war, dass die Gleichung $\varrho = \text{Const.}$ ein System *confocaler Ellipsoide* darstellt, andererseits aber auch, dass die Formel $\mu = \text{Const.}$ das zugehörige System *confocaler Hyperboloide* repräsentirt. Rücksichtlich dieser Verhältnisse pflegt man ϱ, μ, φ kurzweg als *elliptische Coordinaten* zu bezeichnen.

§ 2.

Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Punkte, unter der Voraussetzung, dass einer dieser beiden Punkte ein Brennpunkt ist.

Auf einer *gegebenen Ellipsoidfläche*, die nicht gerade identisch mit der Brennlinie ist, deren constanter Parameter ϱ also > 1 sein wird, markire man irgend einen Punkt (ϱ, μ, φ) , und bezeichne den Abstand dieses Punktes vom Brennpunkte A mit E . Alsdann ist nach (3.):

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{a(\varrho - \mu)}.$$

Dieser mit den Constanten a, ϱ und der Variablen μ behaftete Ausdruck wird, weil die Brennstrahlen E jener Ellipsoidfläche durchweg von 0 verschieden sind, eine *stetige Function* von μ sein, also, zufolge des Satzes (8.) pg. 85 entwickelbar sein nach den $P_n(\mu)$:

$$(5.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{a(\varrho - \mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\mu).$$

Um irgend einen der Coefficienten C_n , z. B. C_5 zu erhalten, multiplicire man die Formel (5.) mit $P_5(\mu)d\mu$, und integriere über

$$\mu = -1 \dots +1.$$

Alsdann erhält man auf Grund der bekannten Integraleigenschaften pg. 78:

$$\frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} \frac{P_5(\mu) d\mu}{\varrho - \mu} = \frac{2}{2 \cdot 5 + 1} C_5,$$

oder, falls man den Buchstaben μ durch σ ersetzt:

$$C_5 = \frac{2 \cdot 5 + 1}{2} \frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} \frac{P_5(\sigma) d\sigma}{\varrho - \sigma}.$$

In analoger Weise erhält man offenbar allgemein:

$$C_n = \frac{2n + 1}{2} \frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\sigma) d\sigma}{\varrho - \sigma},$$

also mit Rücksicht auf (9.) pg. 314:

$$C_n = \frac{2n + 1}{2} \frac{1}{a} Q_n(\varrho).$$

Dies in (5.) substituirt, ergibt sich:

$$(6.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{a(\varrho - \mu)} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{2} P_n(\mu) Q_n(\varrho).$$

In analoger Weise gelangt man, was den vom *andern* Brennpunkte A' ausgehenden Brennstrahl E' betrifft, mit Rücksicht auf (3.) zu folgender Formel:

$$(7.) \quad \frac{1}{E'} = \frac{1}{a(\varrho + \mu)} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n + 1}{2} P_n(\mu) Q_n(\varrho).$$

Uebrigens kann man diese Entwicklung (7.) leicht aus (6.) dadurch ableiten, dass man μ mit $-\mu$ vertauscht, und dabei Rücksicht nimmt auf die Relation (13.) pg. 30.

Bei der einen wie bei der andern Entwicklung ist nur vorausgesetzt, dass der Punkt (ϱ, μ, φ) auf einer Ellipsoidfläche liege, die nicht gerade mit der Brennnlinie zusammenfällt. Demgemäss sind die Entwicklungen (6.), (7.) gültig für jeden Raumpunkt (ϱ, μ, φ) , falls nur $\varrho > 1$ ist.

Bemerkung. — Von grosser Wichtigkeit ist es, den Ausdruck $\frac{1}{E}$ auch für den Fall zu entwickeln, dass *beide* Endpunkte von E beliebig gegeben sind. Bezeichnet man diese Punkte mit (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) , ferner ihre elliptischen Coordinaten mit $(\varrho, \vartheta, \varphi)$ und $(\varrho_1, \vartheta_1, \varphi_1)$, so erhält man:

$$E^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1),$$

also mit Rücksicht auf (1.):

$$E^2 = a^2 \left\{ \begin{aligned} & [\varrho^2 \cos^2 \vartheta + (\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta] \\ & + [\varrho_1^2 \cos^2 \vartheta_1 + (\varrho_1^2 - 1) \sin^2 \vartheta_1] - 2(\varrho \varrho_1 \cos \vartheta \cos \vartheta_1) \\ & + \sqrt{\varrho^2 - 1} \sqrt{\varrho_1^2 - 1} \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1) \end{aligned} \right\},$$

oder, was dasselbe ist:

$$E^2 = a^2 \left\{ \begin{aligned} & [\varrho^2 + \mu^2 - 1] + [\varrho_1^2 + \mu_1^2 - 1] \\ & - 2(\varrho \varrho_1 \mu \mu_1 + \sqrt{(1 - \varrho^2)(1 - \varrho_1^2)(1 - \mu^2)(1 - \mu_1^2)} \cos(\varphi - \varphi_1)) \end{aligned} \right\},$$

folglich:

$$(8.) \quad \frac{a}{E} = \frac{1}{\sqrt{\begin{aligned} & -2 + (\varrho^2 + \varrho_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2) - 2\varrho \varrho_1 \mu \mu_1 \\ & - 2\sqrt{(1 - \varrho^2)(1 - \varrho_1^2)(1 - \mu^2)(1 - \mu_1^2)} \cos(\varphi - \varphi_1) \end{aligned}}}$$

Um die Schwierigkeiten zu überwinden, welche die Entwicklung dieses ziemlich complicirten Ausdruckes (8.) mit sich bringt, werden wir uns der *Laplace'schen Differentialgleichung* bedienen. Zu diesem Zwecke aber wird zuvörderst die Transformation dieser Laplace'schen Differentialgleichung auf elliptische Coordinaten erforderlich sein.

§ 3.

Transformation des Laplace'schen Differentialausdruckes auf elliptische Coordinaten.

Jacobi'scher Satz. — Führt man an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z die Parameter α, β, γ dreier Flächensysteme ein, die zu einander orthogonal sind, so erhält man für irgend ein Linienelement ds eine Formel von folgender Gestalt:

$$(1.) \quad (ds)^2 = (d\alpha)^2 + (d\beta)^2 + (d\gamma)^2 = A(d\alpha)^2 + B(d\beta)^2 + C(d\gamma)^2,$$

wo A, B, C bestimmte Functionen von α, β, γ sind.

Gleichzeitig wird alsdann, falls $f = f(x, y, z)$ eine beliebig gegebene Function vorstellt, der Laplace'sche Differentialausdruck Δf , durch Einführung von α, β, γ , folgende Gestalt annehmen:

$$(2.) \quad \Delta f = \frac{1}{D} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{D}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{D}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{D}{C} \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right) \right],$$

wo $D = \sqrt{ABC}$ ist.

So lautet ein wohl zuerst von *Jacobi*, im 36. Bande des *Crelle'schen Journals*, ausgesprochener Satz. Ohne auf die Begründung dieses Satzes einstweilen näher einzugehen*), wollen wir denselben sofort in

*) Der Beweis des Satzes soll später gegeben werden in § 6 auf pg. 345.

Anwendung bringen, und zwar zuerst auf Polarcoordinaten, später auf elliptische Coordinaten.

Anwendung auf Polarcoordinaten. — Setzt man

$$(3.) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \vartheta, \\ y &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \end{aligned}$$

so sind r, ϑ, φ die Parameter dreier Flächensysteme, die zu einander *orthogonal* sind [vgl. pg. 23]; so dass also der Jacobi'sche Satz auf r, ϑ, φ (an Stelle von α, β, γ) ohne Weiteres anwendbar ist.

Sind nun (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ die Coordinaten irgend zweier einander unendlich naher Punkte, und sind (r, ϑ, φ) und $(r + dr, \vartheta + d\vartheta, \varphi + d\varphi)$ die Polarcoordinaten derselben, so gelten für x, y, z die Formeln (3.), während gleichzeitig für dx, dy, dz die aus (3.) durch Differentiation entstehenden Formeln zu notiren sind:

$$(4.) \quad \begin{aligned} dx &= dr \cos \vartheta - r \sin \vartheta d\vartheta, \\ dy &= dr \sin \vartheta \cos \varphi + r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi, \\ dz &= dr \sin \vartheta \sin \varphi + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Quadraterhebung und Addition:

$$(5.) \quad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2,$$

wo alsdann ds das betreffende *Linienlement*, d. h. den gegenseitigen Abstand jener beiden Punkte vorstellt.

Diese Formel (5.) entspricht der Formel (1.). Ebenso also wie α, β, γ durch r, ϑ, φ vertreten sind, ebenso sind im gegenwärtigen Falle A, B, C durch $1, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta$ vertreten. Es ist somit:

$$\begin{aligned} A &= 1, & B &= r^2, & C &= r^2 \sin^2 \vartheta, & D &= r^2 \sin \vartheta, \\ \frac{D}{A} &= r^2 \sin \vartheta, & \frac{D}{B} &= \sin \vartheta, & \frac{D}{C} &= \frac{1}{\sin \vartheta}. \end{aligned}$$

Für eine beliebig gegebene Function $f = f(x, y, z)$ ergibt sich daher, auf Grund des Satzes (2.), die Formel:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right],$$

oder, was dasselbe ist:

$$(6.) \quad \Delta f = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right],$$

eine Formel, die wir früher, in (7.) pg. 23, auf sehr viel mühsamerem Wege erhalten haben.

Anwendung auf elliptische Coordinaten. — Die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z hängen mit den elliptischen Coordinaten $\varrho, \vartheta, \varphi$ zusammen durch die Formeln (1.) pg. 327:

$$(7.) \quad \begin{aligned} x &= a\varrho \cos \vartheta, \\ y &= a\sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z &= a\sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \vartheta \sin \varphi; \end{aligned}$$

und dass der Jacobi'sche Satz (1.), (2.) auf diesen Fall anwendbar sei, unterliegt keinem Zweifel. Denn $\varrho, \vartheta, \varphi$ sind, wie wir gesehen haben, die Parameter dreier Flächensysteme, die zu einander *orthogonal* sind. Bildet man nun, auf Grund der Formeln (7.), den Ausdruck:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2,$$

so erhält man durch elementare Rechnung:

$$(8.) \quad (ds)^2 = a^2 \left[\frac{\varrho^2 - \mu^2}{\varrho^2} (d\varrho)^2 + (\varrho^2 - \mu^2) (d\vartheta)^2 + (\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 \right],$$

wo $\mu = \cos \vartheta$. Ein Blick auf (1.) zeigt also, dass, ebenso wie α, β, γ durch $\varrho, \vartheta, \varphi$ vertreten sind, ebenso A, B, C, D die Bedeutungen besitzen werden:

$$\begin{aligned} A &= a^2 \frac{\varrho^2 - \mu^2}{\varrho^2 - 1}, & B &= a^2 (\varrho^2 - \mu^2), & C &= a^2 (\varrho^2 - 1) \sin^2 \vartheta, \\ & & & & D &= a^3 (\varrho^2 - \mu^2) \sin \vartheta, \\ \frac{D}{A} &= a (\varrho^2 - 1) \sin \vartheta, & \frac{D}{B} &= a \sin \vartheta, & \frac{D}{C} &= a \frac{\varrho^2 - \mu^2}{(\varrho^2 - 1) \sin \vartheta}. \end{aligned}$$

Somit folgt aus (2.):

$$\Delta f = \frac{1}{a^2 (\varrho^2 - \mu^2) \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} \left((\varrho^2 - 1) \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\varrho^2 - \mu^2}{(\varrho^2 - 1) \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right],$$

oder, was dasselbe ist:

$$\Delta f = \frac{1}{a^2 (\varrho^2 - \mu^2)} \left[- \frac{\partial}{\partial \varrho} \left((1 - \varrho^2) \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\mu^2 - \varrho^2}{(1 - \varrho^2)(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right].$$

Diese Formel aber ist, mit Rücksicht auf die identische Gleichung:

$$\frac{\mu^2 - \varrho^2}{(1 - \varrho^2)(1 - \mu^2)} = \frac{1}{1 - \mu^2} - \frac{1}{1 - \varrho^2}$$

und mit Rücksicht auf die Transformation pg. 23:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right),$$

auch so darstellbar:

$$(9.) \quad \Delta f = \frac{1}{a^2(\varrho^2 - \mu^2)} \left\{ + \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} \left((1 - \varrho^2) \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{1 - \varrho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} \right] \right\},$$

also unter Anwendung der Abbreviaturen (7.) pg. 323 auch so:

$$(9a.) \quad \Delta f = \frac{1}{a^2(\varrho^2 - \mu^2)} \left[\left(\delta_\mu f + (\mu) \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) - \left(\delta_\varrho f + (\varrho) \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) \right].$$

Die für $\frac{1}{E}$ sich ergebenden partiellen Differentialgleichungen. —
Versteht man unter E die gegenseitige Entfernung irgend zweier Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) und bezeichnet man die elliptischen Coordinaten dieser Punkte mit $(\varrho, \vartheta, \varphi)$ und $(\varrho_1, \vartheta_1, \varphi_1)$, und setzt man der Einfachheit willen:

$$(10.) \quad \varphi_1 = 0,$$

so ist nach (8.) pg. 331:

$$(11.) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{a \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} -2 + (\varrho^2 + \varrho_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2) - 2\varrho\varrho_1\mu\mu_1 \\ -2\sqrt{(1-\varrho^2)(1-\varrho_1^2)(1-\mu^2)(1-\mu_1^2)} \cos \varphi \end{array} \right\}}}.$$

Dieser Ausdruck $\frac{1}{E}$ repräsentirt offenbar das Potential einer in $(\varrho_1, \mu_1, 0)$ concentrirten Masse Ems in Bezug auf den Punkt (ϱ, μ, φ) , und entspricht daher der Laplace'schen Differentialgleichung:

$$\Delta \frac{1}{E} = 0,$$

d. i. nach (9a.) der Gleichung:

$$(12.) \quad \delta_\mu \frac{1}{E} + (\mu) \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \varphi^2} = \delta_\varrho \frac{1}{E} + (\varrho) \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \varphi^2}.$$

Beachtet man nun, dass der Ausdruck $\frac{1}{E}$ (11.) in Bezug auf die vier Argumente $\varrho, \varrho_1, \mu, \mu_1$ *symmetrisch* ist, so erkennt man sofort, dass diese mit Bezug auf μ, ϱ gefundene Differentialgleichung (12.) in genau derselben Weise auch gelten muss mit Bezug auf je zwei andere jener vier Argumente. Demgemäss ergeben sich also im Ganzen folgende Formeln:

$$(12a.) \quad \delta_\mu \frac{1}{E} + (\mu) \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \varphi^2},$$

$$(12b.) \quad = \delta_\varrho \frac{1}{E} + (\varrho) \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial \varphi^2}$$

$$(12c.) \quad = \delta_{\mu_1} \frac{1}{E} + (\mu_1) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{1}{E}$$

$$(12d.) \quad = \delta_{\varphi_1} \frac{1}{E} + (\varphi_1) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{1}{E},$$

der Art, dass all' diese *vier* Ausdrücke einander *gleich* sind.

§ 4.

Entwicklung der reciproken Entfernung zweier beliebig gegebener Punkte.

Um für unsere Untersuchungen eine feste und anschauliche Basis zu erhalten, mögen zwei Ellipsoidflächen gegeben sein mit den Parametern $\varrho < \varrho_1$. Gleichzeitig mag auf der Ellipsoidfläche ϱ ein Punkt (ϱ, μ, φ) gedacht werden, der längs dieser Fläche in beliebiger Bewegung begriffen ist; während andererseits auf der Ellipsoidfläche (ϱ_1) ein völlig fester Punkt $(\varrho_1, \mu_1, 0)$ markirt sein soll. Die gegenseitige Entfernung E dieser beiden Punkte wird alsdann eine Function von μ, φ sein, welche niemals verschwindet. Folglich wird $\frac{1}{E}$, d. i. der in (11.) angegebene Ausdruck, eine *stetige* Function von μ, φ sein, mithin entwickelbar sein nach den Kugelfunctionen von μ, φ [Satz pg. 55]. Diese Entwicklung mag angedeutet sein durch die Formel:

$$(13.) \quad \frac{a}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \varphi),$$

wo $2a$ den gegenseitigen Abstand der beiden Brennpunkte bezeichnet. Substituirt man hier für die Functionen $Y_n(\mu, \varphi)$ ihre bekannten Werthe [pg. 76]:

$$(13a.) \quad Y_n(\mu, \varphi) = \sum_{j=0}^n [A_{nj} P_{nj}(\mu) \cos j\varphi + A'_{nj} P_{nj}(\mu) \sin j\varphi],$$

so erhält man:

$$(14.) \quad \frac{a}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n [A_{nj} P_{nj}(\mu) \cos j\varphi + A'_{nj} P_{nj}(\mu) \sin j\varphi],$$

wo die A_{nj}, A'_{nj} Constanten, oder, genauer ausgedrückt, Functionen von $\varrho, \mu_1, \varrho_1$ sein werden.

Es handelt sich nun um die nähere Bestimmung dieser unbekannten Functionen A_{nj}, A'_{nj} . Um die A_{nj} zu finden, werden wir auf gewisse *Eigenschaften* derselben aufmerksam machen, sodann gewisse *Differentialgleichungen* angeben, denen diese A_{nj} Genüge leisten, und sodann erst übergehen zur wirklichen Bestimmung der A_{nj} . Was andererseits die A'_{nj} betrifft, so wird sich bald ergeben, dass dieselben sämmtlich $= 0$ sind.

Eigenschaften der A_{nj} . — Multiplicirt man die Formel (14.) mit $P_{85}(\mu) \cos 5\varphi \cdot d\mu d\varphi$, und integrirt über $\mu = -1 \dots +1$ und $\varphi = 0 \dots 2\pi$, so fallen rechter Hand sämmtliche Glieder fort, mit alleiniger Ausnahme des mit A_{85} behafteten; wie sich solches mittelst der Integraleigenschaften der P_{nj} [pg. 79] und mittelst der bekannten Formeln

$$\int_0^{2\pi} \cos j\varphi \cos k\varphi d\varphi = 0, \quad (\text{für } j \neq k),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos j\varphi \sin k\varphi d\varphi = 0, \quad (\text{für } j \neq k \text{ und auch für } j = k),$$

leicht ergibt. Demgemäss erhält man:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{a}{E} P_{85}(\mu) \cos 5\varphi \cdot d\mu d\varphi = M_{85} A_{85},$$

wo M_{85} eine ganz bestimmte Zahl vorstellt. Genau dasselbe gilt, falls man statt der Zahlen 8, 5 irgend welche andere Zahlen n, j nimmt: so dass man also zu folgender Formel gelangt:

$$(15.) \quad A_{nj} = \frac{1}{M_{nj}} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{a}{E} P_{nj}(\mu) \cos j\varphi d\mu d\varphi.$$

Ferner ergibt sich aus (14.) in analoger Weise:

$$(16.) \quad A'_{nj} = \frac{1}{N_{nj}} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{a}{E} P_{nj}(\mu) \sin j\varphi d\mu d\varphi.$$

Beiläufig ergibt sich aus diesen Darlegungen, dass die hier auftretenden Zahlen M, N folgende Werthe haben:

$$M_{nj} = \int_{-1}^{+1} [P_{nj}(\mu)]^2 d\mu \cdot \int_0^{2\pi} [\cos j\varphi]^2 d\varphi,$$

$$N_{nj} = \int_{-1}^{+1} [P_{nj}(\mu)]^2 d\mu \cdot \int_0^{2\pi} [\sin j\varphi]^2 d\varphi;$$

woraus folgt:

$$M_{nj} = N_{nj} = \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)} \frac{2\pi}{\varepsilon_j},$$

wo ε_j die in (4.) pg. 70 angegebene Bedeutung besitzt.

Um auf Grund der Formel (15.) nähere Auskunft zu erhalten über die von $\varrho, \mu_1, \varrho_1$ abhängenden Functionen A_{nj} , bemerken wir zuvörderst, dass die in jenem Integral (15.) enthaltenen Werthe von $\frac{a}{E}$, ihrer geometrischen Bedeutung zufolge, durchweg endlich sind, und durchweg endlich bleiben werden, falls man z. B. das kleinere Ellipsoid (ϱ)

zur Brennpunktlinie sich zusammenziehen, d. h. ϱ in 1 übergehen lässt. Hieraus folgt, dass die von ϱ , μ_1 , ϱ_1 abhängende Function A_{nj} für $\varrho = 1$ endlich bleibt.

Desgleichen werden die in (15.) enthaltenen Werthe von $\frac{a}{E}$ endlich bleiben, wenn man den festen Punkt $(\varrho_1, \mu_1, 0)$ an die höchste Stelle des Ellipsoids (ϱ_1) versetzt, mithin μ_1 in 1 übergehen lässt. Demgemäss ergibt sich aus (15.), dass A_{nj} endlich bleibt für $\mu_1 = 1$.

Ueberdies erkennt man, dass die in (15.) enthaltenen Werthe von $\frac{a}{E}$ durchweg $= 0$ sein werden, sobald man das Ellipsoid (ϱ_1) zur unendlich fernen Kugelfläche sich erweitern, mithin ϱ_1 in ∞ übergehen lässt. Demgemäss folgt aus (15.), dass A_{nj} verschwindet für $\varrho_1 = \infty$.

Alles zusammengefasst, sind also, was die von ϱ , μ_1 , ϱ_1 abhängenden Functionen A_{nj} betrifft, folgende drei Eigenschaften zu notiren:

$$(17x.) \quad A_{nj} \quad \text{endlich für} \quad \varrho = 1,$$

$$(17y.) \quad A_{nj} \quad \text{endlich für} \quad \mu_1 = 1,$$

$$(17z.) \quad A_{nj} \quad \text{gleich Null für} \quad \varrho_1 = \infty.$$

Was ferner die A'_{nj} betrifft, so hängt der Ausdruck $\frac{a}{E}$, wie aus (11.) ersichtlich ist, von φ nur insofern ab, als derselbe mit $\cos \varphi$ behaftet ist. Es wird also dieser Ausdruck für $\varphi = \pi - \alpha$ und $\varphi = \pi + \alpha$ denselben Werth haben; während $\sin j\varphi$ für $\varphi = \pi - \alpha$ und $\varphi = \pi + \alpha$ entgegengesetzte Werthe besitzt. Hieraus folgt, dass das Integral

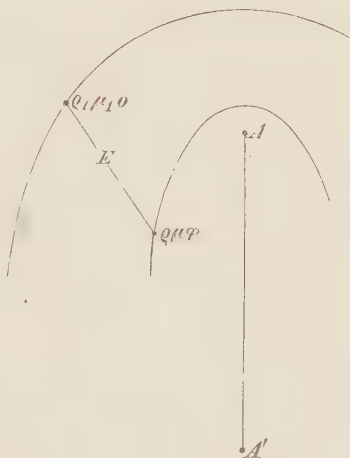
$$\int_0^{2\pi} \frac{a}{E} \sin j\varphi \cdot d\varphi$$

verschwindet. Solches aber erkannt, folgt aus (16.) sofort:

$$(18.) \quad A'_{nj} = 0.$$

Differentialgleichungen der A_{nj} . — Aus (13.), (13a.) folgt mit Rücksicht auf (18.):

$$(19.) \quad \frac{a}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \varphi),$$



$$(19a.) \quad Y_n(\mu, \varphi) = \sum_{j=0}^n A_{nj} P_{nj}(\mu) \cos j\varphi.$$

Mittelst dieser Formeln lassen sich die für $\frac{a}{E}$ geltenden Differentialgleichungen (12a., b., c., d.) übertragen auf die A_{nj} . Beachtet man z. B., dass $\frac{a}{E}$ der Differentialgleichung (12a., b.) Genüge leistet:

$$(\alpha.) \quad \delta_\mu \frac{a}{E} + (\mu) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{a}{E} = \delta_\varphi \frac{a}{E} + (\varrho) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{a}{E},$$

und substituirt man hier für $\frac{a}{E}$ den Werth (19.), so folgt:

$$(\beta.) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\delta_\mu Y_n + (\mu) \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\delta_\varphi Y_n + (\varrho) \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} \right).$$

Der hier auf der linken Seite unter dem Summenzeichen stehende Ausdruck ist aber, weil $Y_n = Y_n(\mu, \varphi)$, als Kugelfunction n -ter Ordnung der Differentialgleichung (16.) pg. 48:

$$n(n+1)Y_n + \delta_\mu Y_n + (\mu) \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} = 0$$

entspricht, identisch mit $-n(n+1)Y_n$; so dass also die Formel (β .) die einfachere Gestalt gewinnt:

$$(\gamma.) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(n(n+1)Y_n + \delta_\varphi Y_n + (\varrho) \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} \right) = 0.$$

Und hieraus folgt weiter, falls man für Y_n den Werth (19a.) substituirt:

$$(\delta.) \quad \mathfrak{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n [n(n+1)A_{nj} + \delta_\varphi A_{nj} - j^2(\varrho)A_{nj}] P_{nj}(\mu) \cos j\varphi = 0,$$

wo \mathfrak{L} nur als *Abbreviatur* für die linke Seite dienen soll. Aus dieser Formel (δ .) folgt in genau derselben Weise, in welcher vorhin der Uebergang von (14.) zu (15.) stattfand:

$$(\varepsilon.) \quad n(n+1)A_{nj} + \delta_\varphi A_{nj} - j^2(\varrho)A_{nj} = \frac{1}{M_{nj}} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \mathfrak{L} P_{nj}(\mu) \cos j\varphi \cdot d\mu d\varphi,$$

wo auch die Zahl M_{nj} genau dieselbe ist, wie dort. Nach (δ .) ist aber \mathfrak{L} stets $= 0$. Somit folgt aus (ε .):

$$(\zeta.) \quad n(n+1)A_{nj} + \delta_\varphi A_{nj} - j^2(\varrho)A_{nj} = 0.$$

Ebenso wie diese Formel (ζ .) aus (α .), d. i. aus der Differentialgleichung (12a., b.) entstanden ist, ebenso wird man offenbar zu analogen Resultaten gelangen auf Grund der Differentialgleichungen (12a., c.) und (12a., d.). Alles zusammengefasst, ergeben sich also folgende drei Formeln:

$$(20x.) \quad n(n+1)A_{nj} + \delta_{\varrho} A_{nj} - j^2(\varrho)A_{nj} = 0,$$

$$(20y.) \quad n(n+1)A_{nj} + \delta_{\mu_1} A_{nj} - j^2(\mu_1)A_{nj} = 0,$$

$$(20z.) \quad n(n+1)A_{nj} + \delta_{\varrho_1} A_{nj} - j^2(\varrho_1)A_{nj} = 0.$$

Bestimmung der A_{nj} . — Die Gleichungen (20x., y., z.) sind durchweg von der Gestalt:

$$(21.) \quad n(n+1)\mathfrak{F} + \delta_z \mathfrak{F} - j^2(z)\mathfrak{F} = 0.$$

Dies aber ist die in (9.) pg. 323 besprochene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren particulare Integrale durch

$$(22.) \quad P_{nj}(z) \quad \text{und} \quad Q_{nj}(z)$$

dargestellt sind. Mit Rücksicht hierauf, und mit Benutzung der früher in (10a.) pg. 325 aufgestellten Tabelle:

	$P_{nj}(z)$ $j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$	$Q_{nj}(z)$ $j = 0, 1, 2, 3, \dots, \text{in inf.}$
$z = \pm 1$	endlich	∞
$z = \infty$	$\neq 0$	0

wird es nun leicht sein, jene von $\varrho, \mu_1, \varrho_1$ abhängenden Functionen A_{nj} wirklich zu bestimmen. Wir räsonniren folgendermassen:

Die von $\varrho, \mu_1, \varrho_1$ abhängende Function A_{nj} genügt der Differentialgleichung zweiter Ordnung (20x.), und muss daher, nach (21.), (22.), die Gestalt besitzen:

$$(24.) \quad A_{nj} = B_{nj}P_{nj}(\varrho) + B'_{nj}Q_{nj}(\varrho),$$

wo die B, B' in Bezug auf ϱ Constanten, also nur noch von μ_1, ϱ_1 abhängig sind. Aus (24.) folgt für $\varrho = 1$ und mit Rücksicht auf (17x.):

$$(\text{endlich}) = B_{nj}P_{nj}(1) + B'_{nj}Q_{nj}(1).$$

Und hieraus folgt, mit Hinblick auf die in der Tabelle (23.) für $P_{nj}(1)$ und $Q_{nj}(1)$ angegebenen Werthe, dass $B'_{nj} = 0$ sein muss; so dass also die Formel (24.) sich reducirt auf:

$$(25.) \quad A_{nj} = B_{nj}P_{nj}(\varrho).$$

Dies in (20y.) substituirt, erkennt man, dass die von μ_1, ϱ_1 abhängende Function B_{nj} der Differentialgleichung

$$n(n+1)B_{nj} + \delta_{\mu_1} B_{nj} - j^2(\mu_1)B_{nj} = 0$$

Genüge leistet, also nach (21.), (22.) die Gestalt haben muss:

$$B_{nj} = \Gamma_{nj}P_{nj}(\mu_1) + \Gamma'_{nj}Q_{nj}(\mu_1),$$

wo die Γ , Γ' nur noch von q_1 abhängen. Somit folgt aus (25.):

$$(26.) \quad A_{nj} = [\Gamma_{nj} P_{nj}(\mu_1) + \Gamma'_{nj} Q_{nj}(\mu_1)] P_{nj}(q),$$

also, falls man z. B. $\mu_1 = 1$ macht, und dabei Rücksicht nimmt auf (17y.):

$$(\text{endlich}) \Rightarrow [\Gamma_{nj} P_{nj}(1) + \Gamma'_{nj} Q_{nj}(1)] P_{nj}(q).$$

Und hieraus folgt, mit Hinblick auf die Tabelle (23.), dass $\Gamma'_{nj} = 0$ sein muss; so dass also die Formel (26.) sich reducirt auf:

$$(27.) \quad A_{nj} = \Gamma_{nj} P_{nj}(\mu_1) P_{nj}(q).$$

Dies in (20z.) substituirt, erkennt man, dass die nur noch von q_1 abhängende Function Γ_{nj} der Differentialgleichung

$$n(n+1)\Gamma_{nj} + \delta_{q_1}\Gamma_{nj} - j^2(q_1)\Gamma_{nj} = 0$$

genügt, also nach (21.), (22.) die Gestalt haben muss:

$$\Gamma_{nj} = C_{nj} P_{nj}(q_1) + D_{nj} Q_{nj}(q_1),$$

wo die C , D Constanten sind. Somit folgt aus (27.):

$$(28.) \quad A_{nj} = [C_{nj} P_{nj}(q_1) + D_{nj} Q_{nj}(q_1)] P_{nj}(\mu_1) P_{nj}(q),$$

also, falls man z. B. $q_1 = \infty$ macht, und dabei Rücksicht nimmt auf (17z.):

$$0 = [C_{nj} P_{nj}(\infty) + D_{nj} Q_{nj}(\infty)] P_{nj}(\mu_1) P_{nj}(q).$$

Hieraus aber folgt, mit Hinblick auf die Tabelle (23.), dass $C = 0$ sein muss; so dass also die Formel (28.) sich reducirt auf:

$$(29.) \quad A_{nj} = D_{nj} Q_{nj}(q_1) P_{nj}(\mu_1) P_{nj}(q).$$

Schliessliches Resultat der Untersuchung. — Es handelte sich um die Entwicklung des in (11.) angegebenen von den *fünf* Variablen q , μ , φ , q_1 , μ_1 abhängenden Ausdrucks:

$$(30.) \quad \frac{a}{E} = \frac{1}{\sqrt{\left\{ \begin{array}{l} -2 + (q^2 + q_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2) - 2q q_1 \mu \mu_1 \\ -2 \sqrt{(1-q^2)(1-q_1^2)(1-\mu^2)(1-\mu_1^2)} \cos \varphi \end{array} \right\}}}.$$

Unter der Voraussetzung, dass der Punkt (q, μ, φ) auf einem *kleineren*, der Punkt $(q_1, \mu_1, 0)$ auf einem *grösseren* Ellipsoide liegt, dass mithin

$$(31.) \quad q < q_1$$

sei, haben wir für diese Entwicklung die Formel (14.), und für die daselbst auftretenden Functionen A_{nj} , A'_{nj} die Werthe (29.) und (18.) erhalten; so dass also die in Rede stehende Entwicklung folgendermassen lautet:

$$(32.) \quad \frac{a}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_{nj} P_{nj}(q) Q_{nj}(q_1) P_{nj}(\mu) P_{nj}(\mu_1) \cos j\varphi.$$

Dabei bezeichnen die D_{nj} noch unbekannte *Constanten*, d. h. Grössen, die von jenen fünf Variablen $\varrho, \mu, \varphi, \varrho_1, \mu_1$ unabhängig sind. Da nun aber der zu entwickelnde Ausdruck (30.), ausser diesen fünf Variablen, überhaupt keine weiteren Grössen (weder variable noch constante) in sich enthält, so können jene D_{nj} nur noch *reine Zahlen* sein. Insbesondere wird man z. B. sagen können, dass jene D_{nj} unabhängig von a sind, weil die Grösse a in dem zu entwickelnden Ausdrucke (30.) nicht vorkommt.

Nachdem wir in solcher Weise das der Specialisirung $\varphi_1 = 0$ entsprechende $\frac{a}{E}$ (30.) entwickelt haben, können wir diese Entwicklung auf das *allgemeine* $\frac{a}{E}$ in (8.) pg. 331 offenbar dadurch übertragen, dass wir φ mit $(\varphi - \varphi_1)$ vertauschen. Alsdann aber gelangen wir zu folgendem Resultate:

Satz. — Bezeichnet E den gegenseitigen Abstand irgend zweier Punkte (ϱ, μ, φ) und $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$, und $2a$ den gegenseitigen Abstand der beiden Brennpunkte, so hat der Quotient $\frac{a}{E}$ den in (8.) pg. 331 angegebenen Werth:

$$(33.) \quad \frac{a}{E} = \frac{1}{\sqrt{\left\{ \begin{array}{l} -2 + (\varrho^2 + \varrho_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2) - 2\varrho\varrho_1\mu\mu_1 \\ -2\sqrt{(1-\varrho^2)(1-\varrho_1^2)(1-\mu^2)(1-\mu_1^2)} \cos(\varphi - \varphi_1) \end{array} \right\}}}.$$

Gleichzeitig wird dieser Ausdruck, falls $\varrho < \varrho_1$ ist, entwickelbar sein in folgende Reihe:

$$(34.) \quad \frac{a}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_{nj} P_{nj}(\varrho) Q_{nj}(\varrho_1) P_{nj}(\mu) P_{nj}(\mu_1) \cos j(\varphi - \varphi_1),$$

($\varrho < \varrho_1$),

wo die D_{nj} Constanten, und zwar reine Zahlen sind.

Zusatz. — Die Werthe dieser D_{nj} sind, wie im folgenden Paragraph gezeigt werden soll, folgende:

$$(35.) \quad D_{nj} = (-1)^j \varepsilon_j \frac{2n+1}{2} \left(\frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} \right)^2,$$

wo ε_j die in (4.) pg. 70 festgesetzte Bedeutung hat, während Π die Gauss'sche Function vorstellt. Demgemäss ist z. B.:

$$(35a.) \quad D_{n0} = \frac{2n+1}{2}.$$

§ 5.

Nachträglicher Beweis der Formel (35.) pg. 341.

Lässt man die beiden Brennpunkte mit einander coincidiren, also $a = 0$ werden, so verwandeln sich die confocalen Ellipsoide in concentrische Kugeln. Und hiermit Hand in Hand gehen alsdann die *elliptischen Coordinaten* in die gewöhnlichen *Polarcoordinaten* über; wie solches leicht durch die betreffenden Formeln bestätigt wird.

Die Formeln für die elliptischen Coordinaten:

$$\begin{aligned}x &= a \varrho \cos \vartheta, \\y &= a \sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \vartheta \cos \varphi, \\z &= a \sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \vartheta \sin \varphi\end{aligned}$$

gehen nämlich, falls man $\varrho = \frac{r}{a}$ setzt, über in:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \vartheta, \\y &= \sqrt{r^2 - a^2} \sin \vartheta \cos \varphi, \\z &= \sqrt{r^2 - a^2} \sin \vartheta \sin \varphi,\end{aligned}$$

und verwandeln sich sodann, falls man $a = 0$ macht, in die Formeln der gewöhnlichen Polarcoordinaten:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \vartheta, \\y &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\z &= r \sin \vartheta \sin \varphi. \quad Q. \ e. \ d.\end{aligned}$$

Demgemäss unterliegt es keinem Zweifel, dass die den *elliptischen Coordinaten* entsprechende Entwicklung (34.), falls man daselbst zuerst $\varrho = \frac{r}{a}$, $\varrho_1 = \frac{r_1}{a}$, und sodann $a = 0$ macht, in die den gewöhnlichen *Polarcoordinaten* entsprechende Entwicklung*)

$$(A.) \quad \frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \varepsilon_j \frac{\prod(n-j)}{\prod(n+j)} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_{nj}(\mu) P_{nj}(\mu_1) \cos j(\varphi - \varphi_1),$$

$$(r < r_1),$$

übergehen muss. Wir werden diesen Uebergang der einen Entwicklung in die andere näher verfolgen, und dabei zugleich die Mittel gewinnen zur Bestimmung der Constanten D_{nj} .

*) Diese Entwicklung (A.) ergiebt sich sofort, falls man in der Formel (5a.) pg. 46 für $P_n(\cos \gamma)$ den Werth (2.) pg. 69 substituirt, und dabei beachtet, dass das dortige C_{nj} den in (5.) pg. 70 angegebenen Werth hat.

Macht man in jener Entwicklung (34.), nachdem dieselbe zuvor durch a dividirt worden ist, die Substitutionen: $\varrho = \frac{r}{a}$, $\varrho_1 = \frac{r_1}{a}$, und lässt man sodann a zu Null herabsinken, so erhält man:

$$(\alpha.) \quad \frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_{nj} \left(\frac{P_{nj}\left(\frac{r}{a}\right) Q_{nj}\left(\frac{r_1}{a}\right)}{a} \right)_{a=0} P_{nj}(\mu) P_{nj}(\mu_1) \cos j(\varphi - \varphi_1),$$

$$(r < r_1);$$

und es bedarf daher, um die erwartete Uebereinstimmung dieser Entwicklung $(\alpha.)$ mit $(A.)$ nachzuweisen, nur noch einer näheren Untersuchung des hier eingeklammerten und mit dem Index $a=0$ versehenen Ausdrucks.

Zu diesem Zwecke sei zuvörderst bemerkt, dass das in (34.) auftretende Product $P_{nj}(\varrho) Q_{nj}(\varrho_1)$ den Werth hat [vgl. (1.), (2.) pg. 322]:

$$(\beta.) \quad P_{nj}(\varrho) Q_{nj}(\varrho_1) = (\sqrt{\varrho^2 - 1} \sqrt{\varrho_1^2 - 1})^j P_n^{(j)}(\varrho) Q_n^{(j)}(\varrho_1),$$

und dass ferner die Functionen $P_n(\varrho)$ und $Q_n(\varrho_1)$ folgendermassen darstellbar sind:

$$(\gamma.) \quad P_n(\varrho) = A \varrho^n \left[1 + \frac{B}{\varrho^2} + \frac{C}{\varrho^4} + \dots \text{fin.} \right],$$

$$(\delta.) \quad Q_n(\varrho_1) = A \frac{1}{\varrho_1^{n+1}} \left[1 + \frac{B}{\varrho_1^2} + \frac{\Gamma}{\varrho_1^4} + \dots \text{infin.} \right],$$

wo A, B, C , etc., A, B, Γ , etc. Constanten sind, mit Bezug auf welche die Relation zu notiren ist*):

$$(\varepsilon.) \quad A A = \frac{2}{2n+1}.$$

Differentiirt man die Formel $(\gamma.)$ nach ϱ , so erhält man:

$$P_n'(\varrho) = A n \varrho^{n-1} \left[1 + \frac{B}{\varrho^2} + \frac{C}{\varrho^4} + \dots \right] - A \varrho^n \left[\frac{2B}{\varrho^3} + \frac{4C}{\varrho^5} + \dots \right],$$

oder kürzer geschrieben:

$$P_n'(\varrho) = A n \varrho^{n-1} \left[1 + \frac{B'}{\varrho^2} + \frac{C'}{\varrho^4} + \dots \right],$$

wo B', C' , etc. gewisse neue Constanten vorstellen. Hieraus folgt sodann durch nochmalige Differentiation nach ϱ :

*) Die Formel $(\gamma.)$ folgt aus (7.) pg. 34. Beachtet man ferner, dass die ϱ 's (sowohl ϱ wie ϱ_1) ihrer Natur nach stets ≥ 1 sind, und dass überdies bei unserer gegenwärtigen Untersuchung ϱ_1 stets $> \varrho$ vorausgesetzt wird, so ergibt sich

$$\varrho_1 > \varrho \geq 1; \text{ und folglich } \varrho_1 > 1.$$

Mit Rücksicht auf diese letzte Relation $\varrho_1 > 1$, ist aber die Formel $(\delta.)$ in der That correct, nämlich zu entnehmen aus (9.) pg. 322. - Dabei ergibt sich gleichzeitig auch die in $(\varepsilon.)$ aufgeführte Relation zwischen A und A .

$$P_n''(\varrho) = An(n-1)\varrho^{n-2}\left[1 + \frac{B''}{\varrho^2} + \frac{C''}{\varrho^4} + \dots\right],$$

wo B'' , C'' , wiederum *neue* Constanten sind. U. s. f. In solcher Weise erhält man allgemein:

$$(\xi.) \quad P_n^{(j)}(\varrho) = An(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)\varrho^{n-j}U,$$

und ebenso aus (δ):

$$(\eta.) \quad Q_n^{(j)}(\varrho_1) = A(-1)^j(n+1)(n+2)\dots(n+j)\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)^{n+j+1}V,$$

wo U und V die mit gewissen Constanten b , c , etc., β , γ , etc. behafteten Ausdrücke vorstellen:

$$U = 1 + \frac{b}{\varrho^2} + \frac{c}{\varrho^4} + \dots,$$

$$V = 1 + \frac{\beta}{\varrho_1^2} + \frac{\gamma}{\varrho_1^4} + \dots$$

Substituirt man die Werthe (ξ), (η) in (β), so folgt, mit Rücksicht auf (ε):

$$(\vartheta.) \quad P_{nj}(\varrho)Q_{nj}(\varrho_1) = \frac{2(-1)^j}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)} \frac{\varrho^n}{\varrho_1^{n+1}} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\varrho^2-1}{\varrho} \frac{1}{\varrho_1} \frac{\varrho_1^2-1}{\varrho_1} \right)^j UV;$$

und hieraus folgt, falls man $\varrho = \frac{r}{a}$ und $\varrho_1 = \frac{r_1}{a}$ setzt:

$$(\kappa.) \quad P_{nj}\left(\frac{r}{a}\right)Q_{nj}\left(\frac{r_1}{a}\right) = \frac{2(-1)^j}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)} \frac{a^{r^n}}{r_1^{n+1}} \left(\frac{1}{r} \frac{r^2-a^2}{r} \frac{1}{r_1} \frac{r_1^2-a^2}{r_1} \right)^j uc,$$

wo alsdann u , v die Bedeutungen haben:

$$u = 1 + b\left(\frac{a}{r}\right)^2 + c\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \dots,$$

$$v = 1 + \beta\left(\frac{a}{r_1}\right)^2 + \gamma\left(\frac{a}{r_1}\right)^4 + \dots$$

Lässt man nun in der Formel (κ), nachdem sie zuvor durch a dividirt ist, dieses a zu Null herabsinken, so erhält man (weil u und v für $a=0$ zu 1 werden):

$$(\lambda.) \quad \left(\frac{P_{nj}\left(\frac{r}{a}\right)Q_{nj}\left(\frac{r_1}{a}\right)}{a} \right)_{a=0} = \frac{2(-1)^j}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)} \frac{r^n}{r_1^{n+1}}.$$

Substituirt man endlich diesen Werth (λ) in die Formel (α), so erhält man:

$$(\mu.) \quad \frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_{nj} \frac{2(-1)^j}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_{nj}(u) P_{nj}(u_1) \cos j(\varphi - \varphi_1),$$

$$(r < r_1).$$

Und diese Formel zeigt in der That völlige Uebereinstimmung mit (A.). Zugleich ergibt sich dabei, dass die Constanten D_{nj} der Relation entsprechen müssen:

$$(v.) \quad D_{nj} \frac{2(-1)^j}{2n+1} \frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)} = \varepsilon_j \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)}.$$

Hieraus aber ergeben sich für diese D_{nj} die in (35.) pg. 341 angegebenen Werthe. — Q. e. d.

§ 6.

Beweis des Jacobi'schen Satzes (pg. 331).

Führt man, an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z , drei neue Variablen α, β, γ ein mittelst der Gleichungen:

$$(1.) \quad x = \varphi(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = \psi(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = \chi(\alpha, \beta, \gamma),$$

so kann man auch umgekehrt (indem man diese Gleichungen nach α, β, γ auflöst) α, β, γ als Functionen von x, y, z ansehen; so dass also z. B. die Formel $\alpha = \text{Const.}$ eine gewisse *Fläche* repräsentirt. In solcher Weise ergeben sich im Ganzen drei Flächensysteme:

$$(2.) \quad \alpha = \text{Const.}, \quad \beta = \text{Const.}, \quad \gamma = \text{Const.},$$

die unter irgend welchen Winkeln einander schneiden werden.

Wir wollen insbesondere *diejenigen* drei Flächen $\alpha = \text{Const.}$, $\beta = \text{Const.}$ und $\gamma = \text{Const.}$ uns vorstellen, welche durch einen *gegebenen* Punkt (x, y, z) hindurch gehen, und die Curven, in denen diese drei Flächen einander schneiden, mit s_1, s_2, s_3 bezeichnen. Schreitet man fort längs der Curve s_1 , d. i. längs der Schnittcurve der beiden Flächen $\beta = \text{Const.}$ und $\gamma = \text{Const.}$, so wird sich α von Augenblick zu Augenblick ändern, und zwar *wachsen* oder *abnehmen* je nach der *Richtung*, in welcher man längs der Curve fortschreitet, während β und γ constant bleiben. Durchwandert man also längs dieser Curve s_1 , vom Punkte (x, y, z) aus, in der Richtung des *wachsenden* α 's ein unendlich kleines Wegelement ds_1 , und bezeichnet man den Endpunkt dieses Wegelementes mit $(x + dx, y + dy, z + dz)$, so ergeben sich für (dx, dy, dz) aus den Formeln (1.) Werthe von folgender Gestalt:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha,$$

wo $d\alpha$ *positiv* ist. Hieraus folgt:

$$ds_1 = \sqrt{A} \cdot d\alpha, \quad \text{wo } A = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2.$$

Und zwar wird, weil ds_1 den absoluten Betrag des Wegelementes vor-

stellen, mithin *positiv* sein soll, und $d\alpha$ ebenfalls *positiv* ist, die hier auftretende Wurzel \sqrt{A} gleichfalls *positiv* sein.

Analoges ist zu bemerken in Betreff der Curve s_2 , in welcher die Flächen $\gamma = \text{Const.}$ und $\alpha = \text{Const.}$ einander schneiden, ebenso in Betreff der Curve s_3 , in welcher $\alpha = \text{Const.}$ und $\beta = \text{Const.}$ sich schneiden; so dass man also zu den Formeln gelangt:

$$\begin{aligned} ds_1 &= \sqrt{A} \cdot d\alpha, & \text{wo } A &= \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2, \\ (3.) \quad ds_2 &= \sqrt{B} \cdot d\beta, & \text{wo } B &= \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2, \\ ds_3 &= \sqrt{C} \cdot d\gamma, & \text{wo } C &= \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2. \end{aligned}$$

Dabei sind die hier auftretenden Grössen ds_1 , ds_2 , ds_3 , $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ und \sqrt{A} , \sqrt{B} , \sqrt{C} durchweg *positiv* zu denken. Sind ferner die Functionen φ , ψ , χ (1.) in bestimmter Weise gegeben, so werden A , B , C ebenfalls bestimmte Functionen von α , β , γ sein.

Fortan wollen wir nun annehmen, dass die drei Flächensysteme (2.) zu einander *orthogonal* sind, dass also der Raum durch diese drei Flächensysteme in lauter unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipeda zerlegbar ist. Ein solches rechtwinkliges Paralleleipedum wird alsdann z. B. dasjenige sein, dessen eine Ecke im Punkte (x, y, z) liegt, und dessen drei Kanten durch die in (3.) angegebenen Linienelemente ds_1 , ds_2 , ds_3 dargestellt sind. Bezeichnet man also die *Hauptdiagonale* dieses Paralleleipedums mit ds , ferner seine dem Punkte (x, y, z) sich anlehnenden Seitenflächen mit do_1 , do_2 , do_3 , endlich sein Volumen mit dv , so ergeben sich die Formeln:

$$(4.) \quad (ds)^2 = (ds_1)^2 + (ds_2)^2 + (ds_3)^2 = A(d\alpha)^2 + B(d\beta)^2 + C(d\gamma)^2,$$

$$(5.) \quad \begin{cases} do_1 = ds_2 ds_3 = \sqrt{BC} d\beta d\gamma = \frac{D}{\sqrt{A}} d\beta d\gamma, \\ do_2 = ds_3 ds_1 = \sqrt{CA} d\gamma d\alpha = \frac{D}{\sqrt{B}} d\gamma d\alpha, \\ do_3 = ds_1 ds_2 = \sqrt{AB} d\alpha d\beta = \frac{D}{\sqrt{C}} d\alpha d\beta, \end{cases}$$

$$(6.) \quad dv = ds_1 ds_2 ds_3 = \sqrt{ABC} d\alpha d\beta d\gamma = D d\alpha d\beta d\gamma,$$

wo D nur als Abbreviatur dienen soll, definiert durch die Formel:

$$(7.) \quad D = \sqrt{ABC}.$$

Die in (4.) angegebene Hauptdiagonale ds kann offenbar als dasjenige Linienelement bezeichnet werden, welches vom Punkte (x, y, z) oder (α, β, γ) hinläuft zum Punkte $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma)$.

Dies vorangeschickt, gehen wir jetzt über zur Ableitung des *Jacobi'schen Satzes*. Für eine beliebig gegebene Function $f = f(x, y, z)$ gilt, falls nur $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ stetig sind, die Formel (A α) pg. 198:

$$(8.) \quad \int \Delta f dv = - \int \frac{df}{dn} do,$$

wo das Integral links über alle Volumenelemente dv innerhalb einer beliebig gegebenen geschlossenen Fläche O hinstreckt ist, während das Integral rechts über diese Fläche selber sich ausdehnt. Dabei bezeichnet do ein Element der Fläche O , und n die *innere**) Normale dieser Fläche.

Denkt man sich den Innenraum der Fläche O durch irgend welche Schnittflächen in kleinere Räume $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$, etc. zerlegt, — sie mögen die *Elementarräume* heissen —, so kann man [vgl. etwa die Betrachtungen auf pg. 197] das in (8.) rechter Hand stehende Integral dadurch erhalten, dass man dasselbe für all' diese Elementarräume *einzelu* bildet, und die so entstehenden Integralwerthe zusammenaddirt; was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$\int \frac{df}{dn} do = \sum \left(\int \frac{df}{dn} do \right)_{\bar{\omega}}.$$

Substituirt man dies in (8.), und nimmt man dabei zu den Elementarräumen $\bar{\omega}$ diejenigen unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeda dv , in welche der Innenraum der Fläche O durch die vorhin betrachteten *orthogonalen Flächensysteme* zerlegt wird, so erhält man:

$$(9.) \quad \int \Delta f dv = - \sum \left(\int \frac{df}{dn} do \right)_{dv}.$$

Um ein einzelnes Glied dieser Summe, also das dem Parallelepipedum dv entsprechende Integral

$$(10.) \quad \left(\int \frac{df}{dn} do \right)_{dv}$$

zu berechnen, bemerken wir zuvörderst, dass dasselbe, entsprechend den sechs Seitenflächen des Parallelepipedums dv , aus *sechs Theilen* besteht. Bedienen wir uns mit Bezug auf das genannte Parallel-

*) Absichtlich ist hier die *innere* Normale eingeführt, während früher in (A α) pg. 198 die *äussere* Normale gebraucht wurde.

epipedum der in (3.), (4.), (5.), (6.), (7.) eingeführten Bezeichnungen, so hat der der Seitenfläche do_1 entsprechende Theil j_1 den Werth:

$$j_1 = \frac{df}{ds_1} do_1.$$

Dabei repräsentirt alsdann df den dem Element ds_1 entsprechenden Zuwachs von f . Der Anfangspunkt und der Endpunkt dieses Elementes haben aber die Coordinaten

$$(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{und} \quad (\alpha + d\alpha, \beta, \gamma);$$

so dass man also für jenen Zuwachs df den Werth erhält:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha,$$

während gleichzeitig ds_1 und do_1 die in (3.), (5.) angegebenen Werthe besitzen:

$$ds_1 = \sqrt{A} \cdot d\alpha, \quad do_1 = \frac{D}{\sqrt{A}} d\beta d\gamma.$$

Demgemäss erhalten wir:

$$j_1 = \frac{D}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\beta d\gamma.$$

Hieraus ergibt sich sofort derjenige Theil k_1 des Integrales (10.), welcher der zu do_1 gegenüberliegenden Seitenfläche des Parallelepipedums entspricht:

$$k_1 = - \left[\frac{D}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{D}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) d\alpha \right] d\beta d\gamma,$$

wo das vorgesetzte Minuszeichen darin seinen Grund hat, dass in (10.) unter n durchweg die *innere* Normale der Oberfläche von dv zu verstehen ist. Die beiden betrachteten Seitenflächen, do_1 selber und die zu do_1 gegenüberliegende Fläche, liefern also zusammengekommen für das Integral (10.) den Beitrag:

$$j_1 + k_1 = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{D}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) d\alpha d\beta d\gamma;$$

wofür wir mit Rücksicht auf (6.) auch schreiben können:

$$j_1 + k_1 = - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{D}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) dv.$$

Analoge Beiträge liefern für das Integral (10.) die beiden andern Flächenpaare des Parallelepipedums dv ; so dass wir also schliesslich für das Integral selber den Werth erhalten:

$$(11.) \quad \left(\int \frac{df}{dn} do \right)_{dv} = - \frac{1}{D} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{D}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{D}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{D}{C} \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right) \right]}_{\Phi} dv.$$

Demgemäss gewinnt die Formel (9.) die Gestalt:

$$(12.) \quad \int \Delta f dv = \sum \frac{1}{D} \Phi dv,$$

d. i. die Gestalt:

$$(13.) \quad \int \Delta f dv = \int \frac{1}{D} \Phi dv,$$

wo Φ als Abbreviatur dient für den in (11.) in der eckigen Klammer enthaltenen Ausdruck, und wo beide Integrale ausgedehnt sind über sämtliche Volumelemente dv des Innenraums der Fläche O .

Da nun diese Fläche O beliebig gewählt war, also auch beliebig klein gemacht werden darf, so folgt aus der Gleichheit der beiden Integrale (13.), dass die unter diesen Integralen stehenden Ausdrücke ebenfalls einander gleich sind. Man erhält also:

$$(14.) \quad \Delta f = \frac{1}{D} \Phi.$$

Und diese Formel repräsentirt, falls man für Φ seine eigentliche Bedeutung aus (11.) substituirt, den zu beweisenden Jacobi'schen Satz. Vgl. (2.) pg. 331.

§ 7.

Rückblick auf die elliptischen Coordinaten.

Es seien irgend zwei einander benachbarte Punkte gegeben mit den elliptischen Coordinaten (ϱ, μ, φ) und $(\varrho + d\varrho, \mu + d\mu, \varphi + d\varphi)$; und zwar mögen die Punkte der Art gelegen sein, dass $d\varrho, d\mu, d\varphi$ positiv sind. Für das die beiden Punkte verbindende Linielement ds gilt nach (8.) pg. 333 die Formel:

$$(1.) \quad (ds)^2 = a^2 \left[\frac{\varrho^2 - \mu^2}{\varrho^2 - 1} (d\varrho)^2 + \frac{\varrho^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} (d\mu)^2 + (\varrho^2 - 1)(1 - \mu^2) (d\varphi)^2 \right].$$

Construirt man nun, was die Flächensysteme $\varrho = \text{Const.}$, $\mu = \text{Const.}$, $\varphi = \text{Const.}$ betrifft, diejenigen drei Flächen, welche durch den Punkt (ϱ, μ, φ) gehen, und ebenso auch diejenigen drei Flächen, welche durch den Punkt $(\varrho + d\varrho, \mu + d\mu, \varphi + d\varphi)$ hindurch gehen, und bezeichnet man die Kanten, die Seitenflächen und das Volumen des von diesen sechs Flächen begrenzten rechtwinkligen Parallelepipeds mit $ds_1, ds_2, ds_3, do_1, do_2, do_3$ und dv , so erhält man aus (1.):

$$(2.) \quad \begin{cases} ds_1 = a \sqrt{\frac{\varrho^2 - \mu^2}{\varrho^2 - 1}} d\varrho, \\ ds_2 = a \sqrt{\frac{\varrho^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}} d\mu, \\ ds_3 = a \sqrt{(\varrho^2 - 1)(1 - \mu^2)} d\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} do_1 = ds_2 ds_3 = a^2 \sqrt{(\varrho^2 - 1)(\varrho^2 - \mu^2)} d\mu d\varphi, \\ do_2 = ds_3 ds_1 = a^2 \sqrt{(1 - \mu^2)(\varrho^2 - \mu^2)} d\varrho d\varphi, \\ do_3 = ds_1 ds_2 = a^2 \sqrt{\frac{\varrho^2 - \mu^2}{(\varrho^2 - 1)(1 - \mu^2)}} d\varrho d\mu, \end{cases}$$

und:

$$(3.) \quad dv = ds_1 ds_2 ds_3 = a^3 (\varrho^2 - \mu^2) d\varrho d\mu d\varphi.$$

Die hier auftretenden Wurzelgrößen sind, weil unter $ds_1, ds_2, ds_3, do_1, do_2, do_3, dv$ stets die *absoluten* Werthe der betreffenden Elemente verstanden sein sollen, und weil überdies $d\varrho, d\mu, d\varphi$, nach unserer Voraussetzung, *positiv* sein sollen, ebenfalls durchweg *positiv*. — Noch sei bemerkt, dass das in (2.) angegebene

$$(4.) \quad do_1 = a^2 \sqrt{(\varrho^2 - 1)(\varrho^2 - \mu^2)} d\mu d\varphi$$

angesehen werden kann als das Element einer Ellipsoidfläche vom Parameter ϱ . Von diesen Formeln wird weiterhin Gebrauch zu machen sein.

Fünfzehntes Capitel.

Ueber die das Rotationsellipsoid betreffenden Aufgaben.

Unter Anwendung der im vorhergehenden Capitel für die reciproke Entfernung zweier Punkte gegebenen Entwicklung sind die Probleme über die elektrische Vertheilung, über den stationären Temperaturzustand und über den stationären elektrischen Strömungszustand für das *Rotationsellipsoid* mit Leichtigkeit lösbar*). Um solches darzuthun, wird es ausreichend sein, zwei *ganz specielle Beispiele* zu behandeln. Das eine wird diejenige elektrische Vertheilung betreffen, welche auf dem Rotationsellipsoid entsteht, falls keinerlei äussere Kräfte einwirken, und das andere diejenige Vertheilung, welche auf dem Rotationsellipsoid durch einer auf seiner Axe gelegenen elektrischen Massenpunkt inducirt wird.

Uebrigens ist jene Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Punkte auch für mancherlei andere Aufgaben von Nutzen. So z. B. soll im gegenwärtigen Capitel gezeigt werden, wie man mittelst derselben die Einwirkung einer unendlich dünnen, von zwei confocalen Ellipsoiden begrenzten homogenen Schaafe auf beliebige Punkte zu bestimmen vermag.

§ 1.

Die elektrische Vertheilung auf dem Ellipsoid, unter der Voraussetzung, dass von Aussen her keinerlei Kräfte einwirken.

Es sei gegeben ein *isolirtes metallisches Ellipsoid* vom Parameter ϱ , welches von Hause aus mit einer *gegebenen Elektrizitätsmenge* M geladen ist. Es soll die Dichtigkeit ε der unter diesen Umständen auf dem Ellipsoid entstehenden elektrischen Belegung näher untersucht werden.

*) Ebenso auch das Problem der magnetischen Induction, wie von *F. Neumann* in der schon auf pg. 310 citirten Abhandlung gezeigt worden ist.

Zur Bestimmung von ε ergeben sich offenbar [vgl. etwa (A.), (B.) pg. 161] die beiden Gleichungen:

$$(1.) \quad \int \varepsilon do = M,$$

$$(2.) \quad \int \frac{\varepsilon do}{E} = G,$$

wo G eine noch unbekannte Constante vorstellt. Auch kann es [weil das Ellipsoid ein *Rotationsellipsoid* ist] keinem Zweifel unterliegen, dass die gesuchte Belegung in Bezug auf die Axe des Ellipsoids symmetrisch sein wird, und dass also die in irgend einem Oberflächenpunkte (ϱ, μ, φ) vorhandene Dichtigkeit ε lediglich eine Function von μ sein kann. Multiplicirt man also das Flächenelement

$$(3.) \quad do = a^2 \sqrt{(\varrho^2 - 1)(\varrho^2 - \mu^2)} d\mu d\varphi, \text{ [vgl. (4.) pg. 350],}$$

mit ε , so ergiebt sich für εdo ein Werth:

$$(4.) \quad \varepsilon do = [\varepsilon a^2 \sqrt{(\varrho^2 - 1)(\varrho^2 - \mu^2)}] d\mu d\varphi,$$

in welchem der in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck, abgesehen vom constanten Parameter ϱ , nur noch von μ abhängt. Denkt man sich diesen Ausdruck nach den Kugelfunctionen $P_n(\mu)$ entwickelt:

$$(5.) \quad \varepsilon a^2 \sqrt{(\varrho^2 - 1)(\varrho^2 - \mu^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\mu),$$

so gewinnt die Formel (4.) die Gestalt:

$$(6.) \quad \varepsilon do = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\mu) \right) d\mu d\varphi,$$

wo alsdann die C 's *unbekannte Constanten* vorstellen.

Es handelt sich jetzt also darum, diese Constanten C der Art zu bestimmen, dass den beiden Gleichungen (1.), (2.) Genüge geschieht. Substituirt man den Werth (6.) in (1.), und beachtet man, dass μ und φ auf der Ellipsoidoberfläche [ebenso wie früher auf der Kugeloberfläche] zwischen $-1 \dots +1$ und $0 \dots 2\pi$ variiren, so erhält man:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\mu) \right) d\mu d\varphi = M,$$

also [mit Rücksicht auf die Integraleigenschaften pg. 78]:

$$(7.) \quad 4\pi C_0 = M, \text{ d. i. } C_0 = \frac{M}{4\pi}.$$

Nachdem in solcher Weise C_0 bestimmt, und die Gleichung (1.) ausgenutzt ist, gehen wir über zur Gleichung (2.). Das in (2.) enthaltene E repräsentirt den Abstand des Elementes $do(\varrho, \mu, \varphi)$ von

irgend einem *innern* Punkte $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$. Demgemäss ist $\varrho_1 < \varrho$, also nach (34.) pg. 341:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_{nj} P_{nj}(\varrho_1) Q_{nj}(\varrho) P_{nj}(\mu_1) P_{nj}(\mu) \cos j(\varphi - \varphi_1),$$

oder, falls man nach den hier auftretenden Cosinus ordnet:

$$(8.) \quad \frac{1}{E} = \mathfrak{U} + \mathfrak{V} \cos(\varphi - \varphi_1) + \mathfrak{W} \cos 2(\varphi - \varphi_1) + \dots,$$

wo alsdann z. B. \mathfrak{U} die Bedeutung hat [vgl. (11.), (12.) pg. 325]:

$$(8a.) \quad \mathfrak{U} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} D_{n0} P_n(\varrho_1) Q_n(\varrho) P_n(\mu_1) P_n(\mu).$$

Substituirt man nun den Werth (6.) in (2.), so erhält man:

$$(9.) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{E} \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\mu) \right) d\mu d\varphi = G,$$

oder, falls man für $\frac{1}{E}$ den Werth (8.) eintreten lässt, und zugleich die Integration nach φ ausführt:

$$2\pi \int_{-1}^{+1} \left(\mathfrak{U} \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\mu) \right) d\mu = G,$$

oder, falls man für \mathfrak{U} den Werth (8a.) substituirt, und die Integration nach μ [mittelst der Integraleigenschaften pg. 78] ausführt:

$$\frac{2\pi}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2n+1} C_n D_{n0} P_n(\varrho_1) Q_n(\varrho) P_n(\mu_1) \right) = G,$$

oder, weil, nach (35a.) pg. 341, $D_{n0} = \frac{2n+1}{2}$ ist:

$$(10.) \quad \frac{2\pi}{a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\varrho_1) Q_n(\varrho) P_n(\mu_1) \right] - G = 0.$$

Da nun diese Gleichung für *beliebige* Lagen des innern Punktes $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$, also für *beliebige* Werthe von μ_1 zwischen $-1 \dots +1$ stattfinden soll, so müssen in derselben [vgl. die Zusätze pg. 60] die Coefficienten der Kugelfunctionen $P_n(\mu_1)$ *einzeln* $= 0$ sein; so dass sich also die Relationen ergeben*):

*) Um das Verfahren deutlicher hervortreten zu lassen, kann man in (10.) im letzten Gliede $G P_0(\mu_1)$ statt G setzen; so dass alsdann die linke Seite der Formel (10.) aus Gliedern besteht, von denen *jedwedes* mit einer der Functionen $P_0(\mu_1), P_1(\mu_1), P_2(\mu_1)$, etc. multiplicirt ist.

$$(11.) \quad \frac{2\pi}{a} C_0 Q_0(\varrho) - G = 0,$$

$$(12.) \quad C_n P_n(\varrho_1) Q_n(\varrho) = 0, \quad [n = 1, 2, 3, \dots].$$

Aus (11.) ergibt sich, falls man für C_0 den schon gefundenen Werth (7.) substituirt, der Werth von G :

$$(13.) \quad G = \frac{M}{2a} Q_0(\varrho), \quad \text{d. i.} = \frac{M}{2a} \log \frac{\varrho + 1}{\varrho - 1},$$

[vgl. pg. 314 (11.) und (13.)].

Andererseits folgt aus (12.), dass die dortigen C_n sämmtlich $= 0$ sein müssen. Also:

$$(14.) \quad C_1 = C_2 = C_3 = \dots = 0.$$

Substituirt man schliesslich die Werthe der C 's (7.), (14.) in der Formel (5.), so folgt:

$$(15.) \quad \varepsilon = \frac{M}{4\pi a^2 \sqrt{(\varrho^2 - 1)(\varrho^2 - \mu^2)}}.$$

Durch die Formeln (13.), (15.) ist die gestellte Aufgabe vollständig gelöst. Es bleibt noch übrig, diese für G und ε erhaltenen Werthe etwas anschaulicher zu gestalten durch Einführung der nach dem Oberflächenpunkte (ϱ, μ, φ) hinlaufenden *Brennstrahlen* E, E' . Diese haben nämlich nach (3.) pg. 329 die Werthe:

$$E = a(\varrho - \mu) \quad \text{und} \quad E' = a(\varrho + \mu).$$

Hieraus folgt sofort:

$$EE' = a^2(\varrho^2 - \mu^2);$$

so dass man also die Formel (15.) auch so schreiben kann:

$$(16.) \quad \varepsilon = \frac{M}{4\pi a \sqrt{\varrho^2 - 1} EE'}.$$

Beachtet man endlich, dass die Oberfläche des gegebenen Conductors durch die Gleichungen (1.) pg. 327 dargestellt ist, so erkennt man sofort, dass die *halben Axen* A und B dieser Oberfläche die Werthe besitzen:

$$A = a\varrho \quad \text{und} \quad B = a\sqrt{\varrho^2 - 1},$$

und dass man also die Formeln (16.) und (13.) auch so schreiben kann:

$$(17.) \quad \varepsilon = \frac{M}{4\pi B \sqrt{EE'}},$$

$$(18.) \quad G = \frac{M}{2a} \log \frac{A + a}{A - a}.$$

Demgemäss gelangt man zu folgendem Satze:

Ist ein isolirter metallischer Conductor, der die Gestalt eines gestreckten Rotationsellipsoides hat, mit irgend welcher Elektricitätsmenge M geladen, so wird die Dichtigkeit ε der an der Oberfläche entstehenden elektrischen Belegung in jedem Punkte der Oberfläche umgekehrt proportional sein mit dem geometrischen Mittel der beiden Brennstrahlen dieses Punktes. Es wird nämlich ε den Werth haben:

$$(19.) \quad \varepsilon = -\frac{M}{4\pi B} \frac{1}{\sqrt{EE'}},$$

wo E, E' die genannten Brennstrahlen vorstellen, während B den Radius des Aequators des Ellipsoides bezeichnet †).

Gleichzeitig wird der in dem Conductor entstehende constante Potentialwerth G lauten:

$$(20.) \quad G = \frac{M}{2a} \log \frac{A+a}{A-a},$$

wo $2a$ den gegenseitigen Abstand der beiden Brennpunkte, und $2A$ die lange Axe des Ellipsoides bezeichnen.

Für den Specialfall $a=0$, d. i. $A=B$, gehen die Formeln (19.), (20.) über in:

$$\varepsilon = \frac{M}{4\pi A^2} \quad \text{und} \quad G = \frac{M}{A},$$

wie *a priori* zu erwarten stand.

§ 2.

Die auf einem zur Erde abgeleiteten Ellipsoid durch einen äussern elektrischen Massenpunkt inducirte Belegung.

Wirkt auf das gegebene und zur Erde abgeleitete Ellipsoid von Aussen her ein elektrischer Massenpunkt M^* ein, so entsteht auf der Oberfläche des Ellipsoides eine elektrische Belegung, deren Dichtigkeit ε und deren Gesamtmasse M sich durch folgende Gleichungen bestimmen [vgl. pg. 161]:

$$(1.) \quad \int \varepsilon d\sigma = M,$$

$$(2.) \quad \frac{M^*}{E^*} + \int \frac{\varepsilon d\sigma}{E} = 0,$$

Nimmt man nun an, jener Massenpunkt $M^*(\varphi^*, \mu^*, \varphi^*)$ liege auf der verlängerten Ellipsoidaxe, es sei also

†) Die Formel (19.) ist, abgesehen von der etwas verschiedenen Bezeichnungsweise, identisch mit einer schon früher auf pg. 219 erwähnten Formel.

$$(3.) \quad \varrho^* > \varrho \quad \text{und} \quad \mu^* = +1 \quad \text{oder} \quad = -1,$$

wo ϱ den constanten Parameter der Ellipsoidoberfläche vorstellt, so wird ε , ebenso wie im vorhergehenden Paragraph, lediglich eine Function von μ sein, so dass man also, ebenso wie damals, setzen kann:

$$(4.) \quad \varepsilon d\varrho = [\varepsilon a^2 \sqrt{(\varrho^2 - 1)} (\varrho^2 - \mu^2)] d\mu d\varphi,$$

$$(5.) \quad \varepsilon a^2 \sqrt{(\varrho^2 - 1)} (\varrho^2 - \mu^2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\mu),$$

$$(6.) \quad \varepsilon d\varrho = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\mu) \right) d\mu d\varphi,$$

wo alsdann die C 's wiederum *unbekannte Constanten* sind.

Lässt man nun den Werth (6.) in die Gleichungen (1.), (2.) eintreten, indem man dabei gleichzeitig für $\frac{1}{E}$ die bekannte Entwicklung substituirt, so nehmen jene Gleichungen, wie aus den Rechnungen des vorigen Paragraph ohne Weiteres ersichtlich ist, die Gestalt an:

$$(7.) \quad 4\pi C_0 = M,$$

$$(8.) \quad \frac{M^*}{E^*} + \frac{2\pi}{a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\varrho_1) Q_n(\varrho) P_n(\mu_1) \right) = 0,$$

wo, ebenso wie damals, $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$ den variablen innern Punkt vorstellt, auf welchen die Entfernungen E, E^* Bezug haben.

Das erste Glied der Formel (8.) ist in die Reihe entwickelbar:

$$(9.) \quad \frac{M^*}{E^*} = \frac{M^*}{a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\varrho_1) Q_n(\varrho^*) P_n(\mu_1) P_n(\mu^*) \right).$$

Es ergiebt sich nämlich diese Entwicklung aus pg. 341, falls man beachtet, dass $\varrho_1 < \varrho^*$, und $\mu^* = \pm 1$ ist, und dass also für $j > 0$ die Formel stattfindet: $P_{nj}(\mu^*) = P_{nj}(\pm 1) = 0$. Denkt man sich den Werth (9.) in der Gleichung (8.) substituirt, so repräsentirt die linke Seite dieser Gleichung eine nach den $P_n(\mu_1)$ fortschreitende Reihe. Und es folgt daher aus dieser Gleichung, dass in ihr die Coefficienten der $P_n(\mu_1)$ *einzeln* = 0 sein müssen. Demgemäss erhält man die Formel:

$$M^* \frac{2n+1}{2} Q_n(\varrho^*) P_n(\mu^*) + 2\pi C_n Q_n(\varrho) = 0$$

d. i.

$$(10.) \quad C_n = - M^* \frac{2n+1}{4\pi} \frac{Q_n(\varrho^*) P_n(\mu^*)}{Q_n(\varrho)},$$

also z. B.:

$$(10a.) \quad C_0 = - M^* \frac{1}{4\pi} \frac{Q_0(q^*)}{Q_0(q)}.$$

Substituirt man aber diese C 's in (5.) und (7.), so erhält man die Werthe von ε und M , und gelangt in solcher Weise zu folgendem Resultate:

Auf das zur Erde abgeleitete Ellipsoid vom Parameter q mag von Aussen her ein elektrischer Massenpunkt $M^(q^*, \mu^*, \varphi^*)$ einwirken, welcher auf der verlängerten Axe liegt, und dessen Coordinate μ^* also $= \pm 1$ ist. Alsdann wird die Dichtigkeit ε der auf der Ellipsoidoberfläche entstehenden elektrischen Belegung in jedem Punkte (q, μ, φ) dieser Oberfläche den Werth haben:*

$$(11.) \quad \varepsilon = - \frac{M^*}{a^2 \sqrt{(q^2 - 1)(q^2 - \mu^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{Q_n(q^*) P_n(\mu^*)}{Q_n(q)} P_n(\mu).$$

Gleichzeitig wird die Gesammtmasse M dieser Belegung lauten:

$$(12.) \quad M = - M^* \frac{Q_0(q^*)}{Q_0(q)}.$$

Dabei ist in (11.) unter $2a$ der gegenseitige Abstand der beiden Brennpunkte zu verstehen.

Bemerkung. — In ganz ähnlicher Weise kann man den Fall eines zur Erde abgeleiteten *schaalenförmigen Conductors* behandeln, dessen *innere* Oberfläche durch die gegebene Ellipsoidfläche (q) dargestellt ist, während seine *äussere* Oberfläche durch irgend eine beliebige andere Fläche dargestellt sein mag. Denkt man sich in diesem Falle den inducirenden Punkt $M^*(q^*, \mu^*, \varphi^*)$ im innern Hohlraume des schaaalenförmigen Conductors gelegen, und zwar auf der Axe des Ellipsoids, so erhält man für die Dichtigkeit ε der auf der innern Fläche entstehenden elektrischen Belegung und für die Gesammtmasse M dieser Belegung folgende Werthe:

$$(13.) \quad \varepsilon = - \frac{M^*}{a^2 \sqrt{(q^2 - 1)(q^2 - \mu^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{P_n(q^*) P_n(\mu^*)}{P_n(q)} P_n(\mu),$$

$$(14.) \quad M = - M^*.$$

Dabei ist zu beachten, dass der Punkt $M^*(q^*, \mu^*, \varphi^*)$ auf der Axe der Fläche (q) liegen soll. Demgemäss wird $q^* = 1$ sein, falls dieser Punkt *auf der Brennlinie* liegt; und andererseits wird, falls derselbe auf der Axe *ausserhalb* der Brennlinie sich befindet, $\mu^* = \pm 1$ sein.

Uebrigens ist die Formel (14.) nur als die Bestätigung eines früher aufgestellten allgemeinen Satzes (pg. 229) anzusehen. Aus dem-

selben Satze ergibt sich, dass die Dichtigkeit der auf der *äussern* Oberfläche des Conductors entstehenden elektrischen Belegung überall $= 0$ ist.

§ 3.

Ueber das Potential einer unendlich dünnen homogenen Schaale, welche begrenzt ist von zwei confocalen Ellipsoidflächen.

Das Potential V einer solchen Schaale auf einen beliebigen Punkt $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$ drückt sich aus durch die Formel:

$$(1.) \quad V = q \int_E \frac{dv}{E},$$

wo q die constante Dichtigkeit der Schaale, ferner dv das Volumenelement der Schaale, und E den Abstand des Elementes dv vom Punkte $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$ bezeichnet. Sind nun ϱ und $\varrho + d\varrho$ die Parameter der beiden die Schaale begrenzenden Flächen, so ist [vgl. (3.) pg. 350]:

$$dv = a^3(\varrho^2 - \mu^2)d\varrho d\mu d\varphi,$$

oder, was dasselbe ist [vgl. (10.) pg. 29]:

$$dv = \frac{2a^3}{3} [P_2(\varrho) - P_2(\mu)] d\varrho d\mu d\varphi.$$

Demgemäss ergibt sich:

$$(2.) \quad V = \frac{2qa^3d\varrho}{3} \left\{ P_2(\varrho) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu d\varphi}{E} - \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{P_2(\mu) d\mu d\varphi}{E} \right\},$$

während gleichzeitig die Masse M der Schaale den Werth haben wird:

$$M = q \int dv = \frac{2qa^3d\varrho}{3} \left\{ P_2(\varrho) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} d\mu d\varphi - \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_2(\mu) d\mu d\varphi \right\}$$

In dieser Formel für M ist das *letzte* Integral bekanntlich $= 0$ [vgl. pg. 78]; so dass man also erhält:

$$(3.) \quad M = \frac{8\pi qa^3d\varrho}{3} P_2(\varrho).$$

Was die Entfernung E zwischen dem Elemente $dv(\varrho, \mu, \varphi)$ und dem sollicitirten Punkte $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$ betrifft, so ist:

$$(4.) \quad \frac{1}{E} = \mathfrak{U} + \mathfrak{B} \cos(\varphi - \varphi_1) + \mathfrak{B} \cos 2(\varphi - \varphi_1) + \dots,$$

wo die Werthe von \mathfrak{U} , \mathfrak{B} , \mathfrak{B} , etc. sofort entnehmbar sind aus der allgemeinen Formel auf pg. 341. Und zwar folgt aus jener Formel, dass \mathfrak{U} , je nachdem $\varrho < \varrho_1$ oder $\varrho > \varrho_1$ ist, die Werthe hat:

$$(5.) \quad \begin{aligned} \mathfrak{U} &= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\varrho) Q_n(\varrho_1) P_n(\mu) P_n(\mu_1), \quad \text{für } \varrho < \varrho_1, \\ \mathfrak{U} &= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(\varrho) P_n(\varrho_1) P_n(\mu) P_n(\mu_1), \quad \text{für } \varrho > \varrho_1; \end{aligned}$$

so dass also für \mathfrak{U} der erste oder zweite Ausdruck gilt, je nachdem der sollicitirte Punkt $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$ *außerhalb* oder *innerhalb* der Schaafe liegt.

Nun folgt aus (2.), falls man den Werth (4.) substituirt, und die Integration nach φ wirklich ausführt:

$$V = \frac{4\pi q a^3 d\varrho}{3} \left\{ P_2(\varrho) \int_{-1}^{+1} \mathfrak{U} d\mu - \int_{-1}^{+1} \mathfrak{U} P_2(\mu) d\mu \right\},$$

oder, falls man für \mathfrak{U} die Werthe (5.) einsetzt, und die Integration nach μ [mittels der Integraleigenschaften pg. 78] ausführt:

$$V = \frac{4\pi q a^3 d\varrho}{3a} \left[P_2(\varrho) Q_0(\varrho_1) - P_2(\varrho) Q_2(\varrho_1) P_2(\mu_1) \right], \quad \text{für } \varrho < \varrho_1,$$

$$V = \frac{4\pi q a^3 d\varrho}{3a} \left[P_2(\varrho) Q_0(\varrho) - Q_2(\varrho) P_2(\varrho_1) P_2(\mu_1) \right], \quad \text{für } \varrho > \varrho_1,$$

also mit Rücksicht auf (3.):

$$(6.) \quad \begin{aligned} V &= \frac{M}{2a} \left[Q_0(\varrho_1) - Q_2(\varrho_1) P_2(\mu_1) \right], \quad \text{für } \varrho < \varrho_1, \\ V &= \frac{M}{2a} \left[Q_0(\varrho) - \frac{Q_2(\varrho)}{P_2(\varrho)} P_2(\varrho_1) P_2(\mu_1) \right], \quad \text{für } \varrho > \varrho_1. \end{aligned}$$

Die betreffenden *Gleichgewichtsfächen*, d. i. die *Flächen constanten Potentials*, werden also dargestellt sein durch die Formeln:

$$(7.) \quad \begin{aligned} Q_0(\varrho_1) - Q_2(\varrho_1) P_2(\mu_1) &= \text{Const.}, \quad \text{für äussere Punkte,} \\ P_2(\varrho_1) P_2(\mu_1) &= \text{Const.}, \quad \text{für innere Punkte.} \end{aligned}$$

Bezeichnet man daher zur Abkürzung die sollicitirten Punkte fortan nicht mit $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$, sondern schlechtweg mit (ϱ, μ, φ) , so gelangt man zu folgendem Resultate:

Betrachtet man das Potential einer unendlich dünnen, von zwei confocalen Ellipsoidflächen begrenzten homogenen Schaafe, so werden die Gleichgewichtsfächen, d. i. die Flächen constanten Potentials, für äussere Punkte (ϱ, μ, φ) durch

$$(A.) \quad Q_0(\varrho) - Q_2(\varrho) P_2(\mu) = \text{Const.},$$

und für innere Punkte (ϱ, μ, φ) durch

$$(J.) \quad P_2(\varrho) P_2(\mu) = \text{Const.}$$

dargestellt sein.

Die letzte Gleichung nimmt, falls man für die Function P_2 ihren analytischen Ausdruck [(10.) pg. 29] substituirt, die Gestalt an:

$$(J'.) \quad 3\rho^2\mu^2 - (\rho^2 + \mu^2) = \text{Const.}$$

Nun sind aber die elliptischen Coordinaten (ρ, μ, φ) des sollicitirten Punktes mit seinen rechtwinkligen Coordinaten (x, y, z) durch die Relationen verbunden [vgl. (1.) pg. 327]:

$$\begin{aligned} x &= a\rho\mu, \\ y &= a\sqrt{\rho^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \\ z &= a\sqrt{\rho^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi; \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \rho^2\mu^2 &= \frac{x^2}{a^2}, \\ \rho^2 + \mu^2 &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} + 1. \end{aligned}$$

Demgemäss ist die Gleichung (J.) auch so darstellbar:

$$(J'') \quad 2x^2 - (y^2 + z^2) = \text{Const.};$$

so dass man also sagen kann:

Sind zwei confocale gestreckte Rotationsellipsoide gegeben, die einander unendlich nahe liegen, und denkt man sich den Raum zwischen diesen beiden Flächen mit homogener Materie erfüllt, so wird die Wirkung dieser Schaafe auf Punkte des innern Hohlraumes von solcher Beschaffenheit sein, dass die betreffenden Gleichgewichtsplächen (Flächen constanten Potentials), wie im Uebrigen die Dimensionen der Schaafe auch beschaffen sein mögen, stets durch die Formel dargestellt sind:

$$2x^2 - (y^2 + z^2) = \text{Const.}$$

Dabei ist der Mittelpunkt der Schaafe als Anfangspunkt des Coordinatensystems, und ihre geometrische Axe als x-Axe vorausgesetzt.

Es bestehen also diese Gleichgewichtsplächen aus theils einflächigen, theils zweiflächigen Rotationshyperboloiden, die den Kegel

$$2x^2 - (y^2 + z^2) = 0$$

zum gemeinschaftlichen Asymptotenkegel haben.

Ebenso wie hier die Wirkung einer von zwei confocalen Ellipsoiden begrenzten Schaafe untersucht ist, in ganz analoger Weise würde sich auch die Wirkung einer von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzten Schaafe untersuchen lassen; -- worauf wir aber hier nicht weiter eingehen wollen.

§ 4.

Uebergang vom gestreckten zum abgeplatteten Rotationsellipsoid.

Führt man in den Formeln (1.) pg. 327:

$$(1.) \quad \begin{aligned} x &= a \varrho \cos \vartheta, \\ y &= a \sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z &= a \sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned}$$

statt der Constante a eine andere Constante b , und gleichzeitig statt der Variable ϱ eine andere Variable σ ein, mittelst der Substitutionen:

$$(2.) \quad a = \frac{b}{i} \quad \text{und} \quad \varrho = i\sigma, \quad (\text{wo } i = \sqrt{-1}),$$

so nehmen jene Formeln die Gestalt an:

$$(3.) \quad \begin{aligned} x &= b \sigma \cos \vartheta, \\ y &= b \sqrt{\sigma^2 + 1} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z &= b \sqrt{\sigma^2 + 1} \sin \vartheta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Diese letztern Formeln repräsentiren offenbar, falls man $\sigma = \text{Const.}$ setzt, die Oberfläche eines *abgeplatteten Rotationsellipsoids*, dessen Brennkreis in der yz -Ebene liegt, und den Radius b besitzt.

Will man also die im gegenwärtigen Capitel behandelten Aufgaben nicht für das gestreckte, sondern für das *abgeplattete* Rotationsellipsoid lösen, so wird solches mittelst der Substitutionen (2.) leicht zu erreichen sein.

Anhang.

Nachträgliche Bemerkungen und Erläuterungen.

Nr. 1; ad pg. 13, 14. — Der dort für die *Kugel* aufgestellte Satz ist unmittelbar übertragbar auf eine *Kugelschaale*, und führt in dieser Beziehung zu folgendem Resultat:

Das Potential einer homogenen, von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Schaale in Bezug auf äussere Punkte ist von genau derselben Beschaffenheit, als wäre die ganze Masse der Schaale in ihrem Mittelpunkte concentrirt. Es ist nämlich dieses Potential $= \frac{M}{r}$, *wo* M *die Masse der Schaale, und* r *den Centralabstand des sollicitirten Punktes bezeichnet.*

Andererseits ist das Potential der Schaale für alle Punkte ihres inneren Hohlraumes constant, nämlich $= 2\pi q (A^2 - A_1^2)$, *wo* $A > A_1$ *die beiden Radien, und* q *die Dichtigkeit vorstellen.*

Nr. 2; ad pg. 56, 57. — Dasselbst ist behauptet worden, dass die Differenz derjenigen Werthe, welche der Ausdruck

$$\mathfrak{B} = (1 - \mu^2) \left(F_1 \frac{\partial F}{\partial \mu} - F \frac{\partial F_1}{\partial \mu} \right)$$

für $\mu = -1$ und $\mu = +1$ annimmt, gleich Null sei. Um diese Behauptung mit voller Strenge zu beweisen, kann folgendes Verfahren dienen.

F ist eine Kugelfunction von μ, φ , also [vgl. die Definition pg. 48] eine ganze rationale Function der drei Grössen:

$$u = \mu, \quad v = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \quad w = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi.$$

Demgemäss erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \mu} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \mu} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \mu},$$

d. i.

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\mu \cos \varphi}{\sqrt{1 - \mu^2}} - \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\mu \sin \varphi}{\sqrt{1 - \mu^2}}.$$

Analoges gilt von F_1 . Der Ausdruck \mathfrak{B} ist daher folgendermassen darstellbar:

$$\mathfrak{B} = \left(F_1 \frac{\partial F}{\partial u} - F \frac{\partial F_1}{\partial u} \right) (1 - \mu^2) - \left(F_1 \frac{\partial F}{\partial v} - F \frac{\partial F_1}{\partial v} \right) \mu \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \\ - \left(F_1 \frac{\partial F}{\partial w} - F \frac{\partial F_1}{\partial w} \right) \mu \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi,$$

wo die in den starken Klammern enthaltenen Ausdrücke, ebenso wie F und F_1 selber, ganze rationale Functionen von u, v, w vorstellen, mithin für $\mu = \pm 1$ endlich bleiben. Mit Rücksicht hierauf aber ergibt sich aus dieser letzten Formel sofort, dass \mathfrak{B} für $\mu = +1$, und ebenso auch für $\mu = -1$ verschwindet. — Q. e. d.

Nr. 3; ad pg. 172. — Die dortigen Formeln $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ nehmen, falls man die ganze Masse der auf der Kugelfläche ausgebreiteten Belegung mit M bezeichnet, die Gestalt an:

$$V_a = \frac{M}{r}, \quad \text{und} \quad V_o = V_i = \frac{M}{A};$$

so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Das Potential einer gleichförmig mit Masse belegten Kugelfläche auf einen äussern Punkt ist gleich der Masse der Belegung, dividirt durch den Centralabstand des Punktes.

Andererseits ist das Potential einer solchen Kugelfläche für all' diejenigen Punkte, welche auf oder innerhalb derselben liegen, constant, nämlich gleich der Masse der Belegung, dividirt durch den Radius der Fläche.

Aus diesem Satze ergibt sich unmittelbar die auf pg. 206 (oben) gemachte Behauptung, dass W' für alle Punkte innerhalb O' den Werth $\frac{M'}{A'}$ besitze.

Nr. 4; ad pg. 180. — Die dortige Formel (10.) ist, wie sich aus ihrer Herleitung sofort ergibt, auf beliebige Dreiecke anwendbar; so dass man zu folgendem Satze gelangt:

Sind A, A_1, R die Seiten irgend eines Dreiecks, und γ der zu R gegenüberliegende Winkel, so wird stets die Gleichung stattfinden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{A}{A_1} \right)^{n+1} P_n(\cos \gamma) = \frac{A(A_1^2 - A^2)}{R^3},$$

falls nur $A < A_1$ ist.

Auf Grund dieses Satzes kann man z. B. die in (25.) pg. 255

angegebene Reihe ohne Weiteres summiren, und gelangt in solcher Weise von jener Formel (25.) zur nächstfolgenden Formel (26.).

Nr. 5; ad pg. 206. — Ueber die dortige Behauptung, dass W' innerhalb O' den Werth $\frac{M'}{A'}$ besitze, vgl. man den Schluss von Nr. 3.

Nr. 6; ad pg. 255. — Ueber die einfache Art und Weise, in welcher man von Formel (25.) zu Formel (26.) gelangen kann, ist Näheres bereits mitgetheilt in Nr. 4.

Zur Orientirung über die in diesem Werke angewendeten Bezeichnungen.

I. Die Constanten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ haben die in (4.) pg. 70 angegebenen Bedeutungen.

II. Die Function Π repräsentirt die *Gauss'sche* Function und findet sich defnirt auf pg. 28 (Note).

III. Von den beiden Functionen P_n und Q_n ist die *erstere* defnirt in (16.) pg. 31, ferner in (10.) pg. 29 und in (7.) pg. 34, die *letzte* in (9.) pg. 314.

IV. Die Functionen $P_n^{(j)}$, P_{nj} und $Q_n^{(j)}$, Q_{nj} sind defnirt durch die Formeln (1.), (2.) pg. 322, 323. Vgl. auch (11.), (12.) pg. 325.

V. Die allgemeine Kugelfunction $Y_n(u, \varphi)$ ist defnirt auf pg. 48, sodann aber, ihrem analytischen Ausdrucke nach, näher angegeben auf pg. 76 (zweiter Satz).

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die in diesem Werke angewendete *F. Neumann'sche* Bezeichnungsweise P_n, Q_n zur *Heine'schen* Bezeichnungsweise P^n, Q^n in folgender Beziehung steht:

$$P_n = P^n, \quad \text{und} \quad Q_n = 2Q^n.$$

Vgl. Heine's Handbuch, zweite Auflage, Bd. 1, p. 11, (1) und pg. 141, (21.).

513.56 N49



a39001



006906831b

513.56
N49

73-1

